Sujet 3 (Bac S)

Exercice 1 (Barycentres et ensembles)

Dans le plan P, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que $AH = BC = 4$. On prendra le centimètre pour unité.

- 1) En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés $\{(A ; 2) ; (B ; 1) ; (C ; 1)\}$.
- 2) On désigne par M un point quelconque de P.

- a) Montrer que le vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
- b) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{v}\|.$$

- 3) On considère le système de points pondérés :

$\{(A ; 2) ; (B ; n) ; (C ; n)\}$ où n est un entier naturel fixé.

- a) Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2 .
- b) Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].
- c) Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.

Préciser la position de G_n quand n tend vers $+\infty$.

- d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\vec{v}\|.$$

Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A .

En préciser le centre et le rayon, noté R_n .

e) Construire E_2 .

Exercice 2 (Obligatoire)(Intégration)

Soit α un réel strictement positif.

1) On pose $I(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{t^2} e^{\frac{-1}{t}} dt$.

a) Exprimer $I(\alpha)$ en fonction de α .

b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$.

2) On pose $J(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{t^3} e^{\frac{-1}{t}} dt$.

En utilisant une intégration par parties, exprimer $J(\alpha)$ en fonction de α et $I(\alpha)$, puis en fonction de α .

b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J(\alpha)$.

Exercice 2(Spécialité)(Isométries)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique : 4 cm) .

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, 1 et $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soit R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z .$$

- 1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation .
- 2) Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 2i| = 2 .$$

- a) Déterminer et construire Γ .
 - b) Déterminer et construire l'image de (Γ) par la transformation R.
- 3) Soit (D) l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|z - 1| = \left| z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| .$$

- a) Déterminer et construire (D) .
- b) Déterminer et construire l'image de (D) par R.

Problème(fonction ln ,points fixes et suite)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et par (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Partie A

On s'intéresse à l'intersection de (C) et de (Δ) .

On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

- 1) Déterminer la fonction dérivée φ' de φ . En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1 \right).$$

En déduire la limite de φ en $+\infty$.

- 3) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point et un seul.

On désigne par α l'abscisse de ce point.

Montrer que $0,3 < \alpha < 0,4$.

Partie B

On pose $J = [0,3 ; 0,4]$.

- 1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est décroissante sur J . En déduire que si x appartient à J alors $f(x)$ appartient à J .
- 2) a) Prouver que pour tout x de J , $|f'(x)| \leq 0,95$ (on pourra montrer que f' est croissante sur J).

b) En déduire que pour tout x de J , $|f(x) - \alpha| \leq 0,95|x - \alpha|$.

- 3) On définit la suite (u_n) par :

$u_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Prouver que pour tout n :

- $u_n \in J$.
- $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,95|u_n - \alpha|$
- $|u_n - \alpha| \leq 0,1 \times (0,95)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

b) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 ,

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}.$$