Sujet 2 (Bac S)

Exercice 1 (géométrie dans l'espace)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions **3** et **4** sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1)a) Calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les trois points A, B et C.

2) Soit Q le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

et Q' le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$.

a) Pourquoi Q et Q' sont-ils sécants ?

b) Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4) On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère S et de la droite (JK).

Exercice 2 (Obligatoire)(Intégration et suites)

Dans cet exercice , n est un entier naturel non nul .

On considère la suite (u_n) définie par :

$$U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$$

1)a) Soit φ la fonction définie sur $[0 ;2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Etudier les variations de φ sur $[0 ;2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0 ;2]$,

$$\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4} .$$

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0,2]$, on a $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$$

d) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$

2)a) Vérifier que, pour tout t dans $[0,2]$, on a $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

En déduire l'intégrale $\mathbf{I} = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Montrer que, pour tout t de $[0,2]$, on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $\mathbf{I} \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} \mathbf{I}$.

c) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L .

Exercice 2 (Spécialité)(Arithmétique : équation $ax+by =c$ et géométrie)

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace .

1)a) Déterminer un couple $(x_0 ;y_0)$ d'entiers relatifs solution de l'équation :

$$48x + 35y = 1$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres.)

b) Dédurre de a) tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation .

2) L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\vec{u}$ $(48 ;35 ;24)$ et le point A $(-11 ;35 ;-13)$

a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ;y ;z)$ tels que :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 .$$

b) Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.

Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100 ;100]$.

En déduire les coordonnées du point de (D), à coordonnées entières, situé le plus près de l'origine .

Problème (Fonction ln , exponentielle de base e, fonction définie par une intégrale, suite)

L'objet du problème est d'étudier une fonction f , puis d'examiner des intégrales qui en sont issues.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$ par :

$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$; on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan .

1)a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout x de $[0 ; +\infty [$, on a :

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$

c) En déduire que la courbe (C) admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

d) Etudier la position relative de (C) et de (Δ) .

2) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation .

3) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) .

Partie B

Pour tout x de $[0 ; +\infty [$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt .$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1) Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question **1** de la **partie A**, donner une interprétation géométrique de $F(x)$.

2) Etudier le sens de variation de F sur $[0 ; +\infty[$.

3) Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1 ; 1+a]$, on a $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\ln$, établir que :

$$\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a.$$

4) Soit x un réel strictement positif.

Déduire de la question **3** : $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$

$$\text{puis } \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

5) On admet que la limite de $F(x)$, quand x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté I .

Etablir que $\frac{1}{2} \ln 2 \leq I \leq \frac{1}{2}$.

6) Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$0 \leq u_n \leq \ln(1 + e^{-2n}).$$

(On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h , définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$).

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

7) Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

a) Exprimer S_n à l'aide de F et n .

b) La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite .