Sujet 1 (BAC S)

Exercice 1 : (Probabilités conditionnelles)

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs.Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- S'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant (le (n+1)-ième) est 0,8 ;
- S'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 ;
- La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

Dans tout l'exercice, si E est un événement, on note P(E) la probabilité de E, $\overline{E}$ l'événement contraire de E.On note P(E/F) la probabilité conditionnelle de l'événement E sachant que F est réalisé.A_n est l'événement « le gardien arrête le n-ième tir ».On a donc $P(A_1) = 0,7$.

1)a) Donner pour $n \geq 1$, les valeurs de $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/\overline{An})$

b) Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{An})$ en fonction de $P(A_n)$.
c) En déduire que, pour tout entier strictement positif n, on a :

$P(A_{n+1}) = 0,2P(A_n) + 0,6$.

2) On pose à présent, pour $n \geq 1$, $p_n = P(A_n)$
et $u_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 .
b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
c) Montrer que (p_n) admet une limite que l'on calculera.

<u>Exercice 2 : (obligatoire) (complexes)</u>

1) On considère le polynôme P défini par :

$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

a) Calculer P(4).
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que :

$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\text{cm}$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives : $a = 4$,$b = 1 + i\sqrt{3}$, $c = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$.

On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

a) Quelles sont les affixes respectives de F et G ?
b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires .

4) Soit H le quatrième sommet du parallèlogramme COFH .

a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré .
b) Calculer l'affixe du point H.
c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 2 (Spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point
M ' d'affixe : $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω ,le rapport k et l'angle θ .

2) Soit M_0 le point d'affixe $1 + 4\sqrt{3} + 3i$ .Pour tout entier naturel n, le point M_{n+1} est défini par $M_{n+1} = f(M_n)$

   a) En utilisant la 1ère question, calculer ΩM_n en fonction de n .
   b) Placer le point M_0 et construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4 .
   c) A partir de quel rang n_0 a-t-on : « Pour tout $n \geq n_0$, M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon r = 0,05 » ?

3) a) Calculer M_0M_1.

b) Pour tout entier naturel n, on note $d_n = M_nM_{n+1}$.
Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .

c) On note $l_n = d_0 + d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ .Calculer ln en fonction de n et en déduire la limite de l_n en $+\infty$.

4) Pour tout entier naturel n non-nul, on note G_n l'isobarycentre des points $M_0, M_1, \ldots, M_n$.

a)Montrer que pour tout n > 0 , $\Omega G_n \leq \frac{16}{n+1}$

b) En déduire la position limite du point G_n quand $n \to +\infty$

Problème :

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction d est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$d(x) = e^{x/(x+1)}$.

a. Calculer la fonction dérivée d' . En déduire les variations de d .
b. Déterminer les limites de d en –1 et en $+\infty$.
c. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a :

$0 < d(x) < e$.

Partie B : Etude de la fonction f .

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$

par : $f(x) = x + 1 - e^{x/(x+1)}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm .
On désigne par f ' et f '' les dérivées première et seconde de f .

1) Démontrer que la droite (D) d'équation
$y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (C) .

Préciser la position relative de (D) et (C) .

2)a) Pour $x \in\ ]-1\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\, e^{\frac{x}{x+1}}$ En déduire le sens de variation de f ' .

c) Dresser le tableau de variations de f ' .

(On admettra que $\lim_{x\to -1} f' = \lim_{x\to +\infty} f' = 1$) .

2) Démontrer que l'équation f '(x) = 0 admet sur] –1 ; +∞ [deux solutions dont l'une est 0 .

Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle.
Donner une valeur approchée de α au centième près.

4) a)Etudier les variations de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C : Prolongement de la fonction f en –1

On considère la fonction g définie sur [-1 ; +∞ [

Par : g(-1) = 0 et g(x) = f(x) ,pour x > -1
On appelle (C ') la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B.**

1) a) Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

b) Pour x ∈] –1 ; +∞ [déterminer la limite lorsque x tend vers –1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\left(\frac{x}{x+1}e^{\frac{x}{x+1}}\right)$.

En déduire que g est dérivable en –1 et préciser sa dérivée g '(-1) .

2) Construire (D) et (C '). Préciser les tangentes à (C') aux points d'abscisses –1 , α , 0 .