<u>Ensembles, applications, relations</u>

<u>Notations :</u>

$\exists$: « il existe » ; $\in$: « appartient à » ; $\subset$: « contenu dans »

$\forall$: « quel que soit » ; $\notin$: « n'appartient pas à » ; $\not\subset$: « n'est pas contenu dans »

$\subseteq$: « contenu ou égal à »

I) <u>Ensembles :</u>

Soient A et B , deux ensembles :

Déf : On dit que <u>A est inclus dans B</u> et on note $A \subset B$ si et seulement si : $\forall x \in A , x \in B$.

Si $A \subset B$ est fausse , on note alors $A \not\subset B$, c'est-à-dire : $\exists x \in A, x \notin B$.

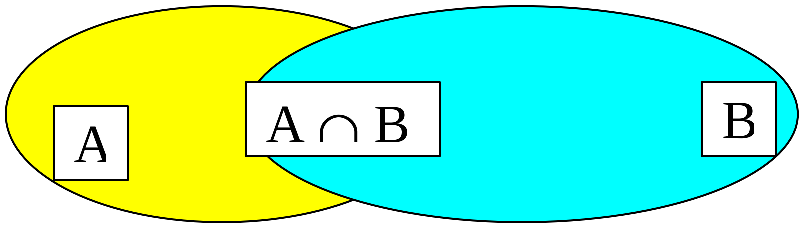
Déf : On dit que <u>A est égal à B</u> ssi $A \subset B$ et $B \subset A$.

1)Opérations élémentaires :

a) Intersection :

L'intersection de A et B ,notée $A \cap B$,est définie par :

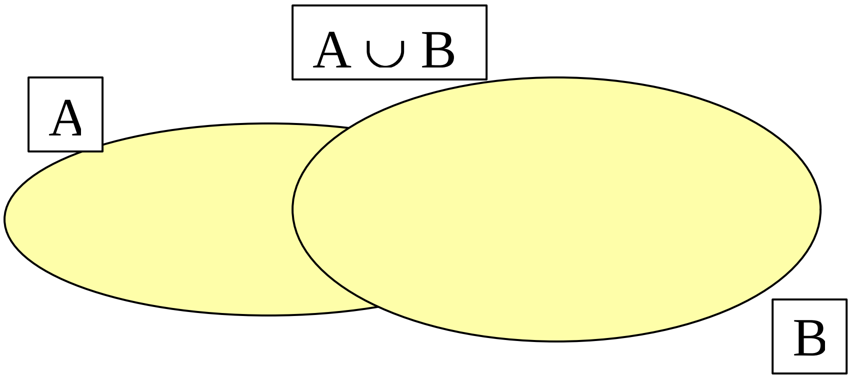
$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ et } x \in B \}$$



b) Réunion :

La réunion de A et B , notée $A \cup B$, est définie par :

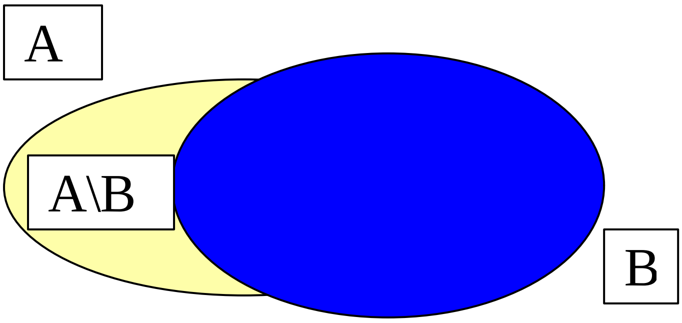
$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ ou } x \in B \}$$



c) Différence :

La différence A moins B , notée A\B , est définie par :

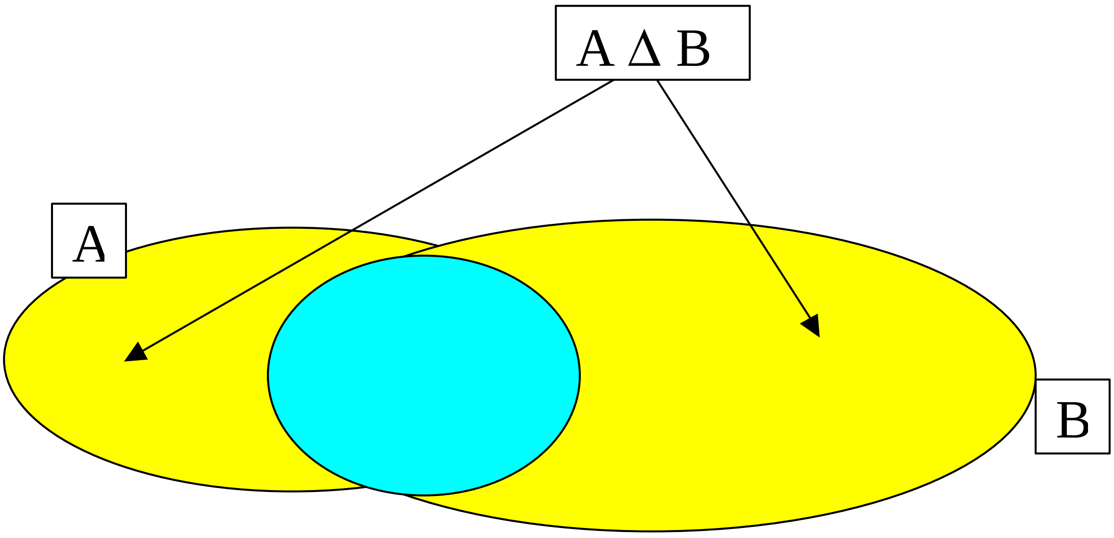
$$A \setminus B = \{ x \,/\, x \in A \,,\, x \notin B \}$$



d) Différence symétrique :

La différence symétrique entre A et B , notée A Δ B , est définie par :

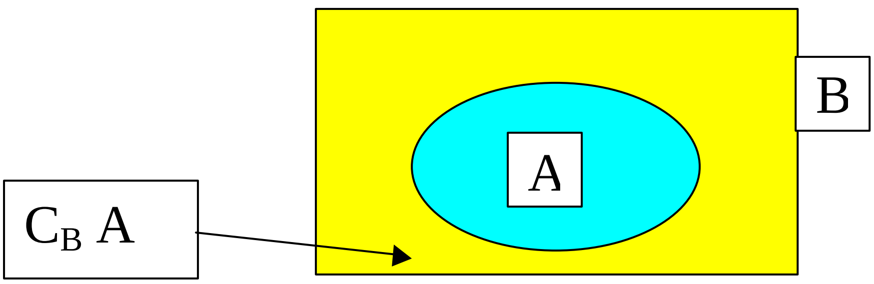
$$A \,\Delta\, B = \{ x \,/\, x \in A \setminus B \cup B \setminus A \}$$



e) Complémentaire :

Supposons que $A \subset B$. Le complémentaire de A dans B , noté $C_B\, A$ ou encore $B \backslash A$, est défini par :

$$C_B\, A = \{\ x \in B \ /\ x \notin A\ \}$$



2) Propriétés élémentaires :

Soient A, B ,C et E quatre ensembles tels que $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$.

- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Associativité : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

- Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- $C_E (A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$

- $C_E (A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$

3) Parties d'un ensemble :

Soit E un ensemble. Soit F un ensemble tel que : $F \subset E$.

F est un sous-ensemble de E ou une partie de E .

L'ensemble des parties de E se note P(E) . P(E) est donc un ensemble d'ensembles .

Remarque :

$\emptyset \in E$ donc $\emptyset \in P(E)$

$E \subset E$ donc $E \subset P(E)$

Si $E \neq \emptyset$, alors P(E) contient au moins deux éléments distincts.

Exples :

$E_1 = \{ a, b, c \}$. $P(E_1) = \{ \emptyset , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{b,c\} , \{a,c\} , \{a,b,c\} \}$

$E_2 = \{ a \}$. $P(E_2) = \{ \emptyset , \{a\} \}$

4) Produit cartésien d'ensembles :

Soient X et Y deux ensembles. Le produit cartésien de X et Y est :

$$X \times Y = \{ (x,y) / x \in X \text{ et } y \in Y \}$$

Exples :

$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \neq \mathbf{R} \times \mathbf{N}$

II) Applications :

1) Définition :

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E vers F est « une règle » qui à tout élément de l'ensemble E fait correspondre **un et un seul** élément de F .

Notation : $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$

E : ensemble de départ
F : ensemble d'arrivée
f(x) image de x par f

Si y appartient à F et s'il existe x de E tel que f(x) = y ,
x est un antécédent de y

ATTENTION : L'image est unique d'après la définition ,par contre un élément de F peut avoir 0 ou plusieurs antécédents .

2) Graphe : Le graphe d'une application f de E vers F est défini par :

$$G(f) = \{ (x,y) \in E \times F \ / \ y = f(x) \}$$

3) Egalité de deux applications :

Deux applications f et g sont dites égales si elles ont le même ensemble de départ et le même ensemble d'arrivée et si elles coïncident en tous points de l'ensemble de départ .

Soient f et g deux applications de E vers F alors :

$$(f = g) \Leftrightarrow (\forall x \in E, f(x) = g(x))$$

4) Restriction et prolongement :

Soit f une application de E vers F et soit $A \subset E$. La restriction de f à A est définie par :

$$f_{|A} : A \to F , x \mapsto f_A(x) = f(x)$$

Remarque : $f_A \neq f$ sauf si $A = E$

f est alors <u>un prolongement</u> de f_A .

5) Injection canonique :

Soit X un ensemble et soit $A \subset X$, alors l'injection canonique de A dans X est définie par :

$j : A \rightarrow X$, $x \mapsto x$. Si A=X ,alors $j = Id_X$ (identité)

6) Image et image réciproque :

Soit $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$.

Soit $A \subset E$, soit $B \subset F$

- Image de f : $\text{Im } f = \{ f(x) / x \in E \} = \{ y \in F / \exists x \in E , f(x) = y \}$
- Image de A (Image directe) : $f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$

Remarque : $\text{Im } f = f(E)$

- Image réciproque de B par f : $f^{-1}(B) = \{ x \in E, f(x) \in B \}$

Propriétés : $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$; $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$; $f^{-1} (C_E A) = C_E(f^{-1}(A))$

Remarque : $f^{-1}(F) = E$

ATTENTION : $f(A\cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (l'autre inclusion n'est vraie que dans certains cas (= si f est injective),cf. plus loin)

$X \subset f^{-1}(f(X))$ (l'inclusion inverse n'est vraie que si f est injective ,cf.plus loin)

<u>7) Injectivité, surjectivité et bijectivité :</u>

Soit $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$.

a) f est <u>injective</u> ssi ($\forall (x,x') \in E\times E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$)

ssi ($\forall (x,x') \in E\times E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$)

ssi (Tout élément de F a <u>au plus</u> un antécédent par f)

b) f est <u>surjective</u> ssi ($\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$)

ssi (Tout élément de F a au moins un antécédent par f)

c) f est bijective ssi f est injective **et** surjective

ssi ($\forall$ y $\in$ F , $\exists$! x $\in$ E , y = f(x))

8) Composition des applications :

Soient f : E $\to$ F , x $\mapsto$ f(x) et g : F $\to$ G , y $\mapsto$ g(y)

La composée de f et g notée gof est l'application suivante :

gof : E $\to$ G , x $\mapsto$ gof(x) = g (f(x))

Remarque :

Pour définir gof, il faut que l'ensemble d'arrivée de f soit l'ensemble de départ de g .

ATTENTION :

Même si E = F = G , a priori fog et gof sont distinctes .

Exples : $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto 2n$; $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $n \mapsto n + 1$

On a : $fog(n) = f(g(n)) = f(n + 1) = 2(n + 1) = 2n + 2$

et $gof(n) = g(f(n)) = (2n) + 1 = 2n + 1$

Donc $fog \neq gof$ (= on dit que o n'est pas commutative)

Déf : Soit f application de E vers E . On pose $f^0 = Id_E$, $f^1 = f$ et $f^{n+1} = fof^n$, pour $n \in \mathbf{N}$.

f^n s'appelle <u>la n-ième iterée de f</u> .

Prop :

- Soit f application de E dans E , alors : $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$
- Soit f l'application de E vers F , alors : $f \circ Id_E = f = Id_F \circ f$

Prop :

Soit $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$; $g : F \to G$, $y \mapsto g(y)$; $h : G \to H$, $z \mapsto h(z)$

alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

9) Applications inversibles :

Soit $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$

Déf : On dit que f est inversible s'il existe $g : F \to E$, tel que : $g \circ f = Id_E$ **et** $f \circ g = Id_F$.

On dit que g est l'inverse de f et $g = f^{-1}$

Prop : Soit $f : E \to F$, si f est inversible , son inverse est unique.

Théorème : Soit f application de E vers F . f est inversible ssi f est bijective .

Théorème : Soient E et F deux ensembles finis de n éléments ($n > 0$). Soit $f : E \to F$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

10) Ensembles equipotents :

Déf : Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont <u>equipotents</u> ou ont le même cardinal ,si il existe une bijection entre E et F.

Théorème (de Bernstein) :
Soient E et F deux ensembles.S'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E , alors E et F sont equipotents.

Déf : On dit que E est <u>dénombrable</u> s'il est equipotent à $\mathbf{N}$.

Déf : Soient E et F deux ensembles. On dit que E est strictement plus puissant que F s'il existe une injection de F vers E, <u>**mais pas**</u> d'injection de E vers F . On note aussi Card E > Card F .

Exples :

$\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^2$ sont equipotents .
$\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^{+*}$ sont equipotents (bijections réciproques : exp et ln).
$\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.
$\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont equipotents.

III) <u>Relations :</u>

1) <u>Définitions :</u>

Déf : Soient E et F deux ensembles , <u>une relation $\Re$ de E vers F</u> est une propriété que peuvent vérifier les éléments de $E \times F$.
On écrit que $x \Re y$ pour dire que (x,y) vérifie la relation considérée.

Déf : Soit $\Re$ une relation de E vers F, alors <u>le graphe de $\Re$</u> est $G(\Re) = \{ (x,y) \in E \times F, x \Re y \}$

Exples :

- Soit dans le plan E = {ensemble des droites} et F = {ensemble des cercles} .

On peut considérer la relation T définie par :

$\forall D \in E , \forall C \in F , (D \, T \, C)$ ssi (D est tangente à C)

- Soit E ensemble et soit F = P(E). Alors la relation « $\in$ » est une relation de E sur P(E).

2) <u>Propriétés des relations sur un ensemble :</u>

Soit E un ensemble et une relation $\Re$ de E dans E .

- $\Re$ est <u>reflexive</u> ssi : $\forall x \in E , x \Re x$

- $\Re$ est <u>symétrique</u> ssi : $\forall (x,y) \in E^2$, $(x \Re y) \Rightarrow (y \Re x)$
- $\Re$ est <u>antisymétrique</u> ssi : $\forall (x,y) \in E^2$, $((x \Re y)$ et $(y \Re x)) \Rightarrow x = y$
- $\Re$ est <u>transitive</u> ssi : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $((x \Re y)$ et $(y \Re z)) \Rightarrow (x \Re z)$

Déf : **-** $\Re$ est une <u>relation d'ordre</u> si $\Re$ est reflexive, antisymétrique et transitive .

- $\Re$ est une <u>relation d'équivalence</u> si $\Re$ est reflexive, symétrique et transitive .

Exples :

Sur **R** , $\leq$ est une relation d'ordre .
Sur **R** , $<$ n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas reflexive)
Sur **N** , la relation « se termine par le même chiffre que » est une relation d'équivalence.
Soit $n \geq 2$. Sur **N** , la relation « avoir le même reste dans la division par n que » est une relation d'équivalence .(= on l'appelle ici, <u>relation de congruence</u>, on la note $x \equiv y\ [n]$)

3) <u>Relations d'équivalence :</u>

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence sur E .

Déf : Soit $x \in E$, $Cl(x) = \{ y \in F / x \Re y \}$ ($Cl(x)$ = classe de x)

Théorème :
Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence, alors :

(i) $\forall x \in E , Cl(x) \neq \emptyset$
(ii) $\bigcup_{x \in E} Cl(x) = E$
(iii) $(x \Re y) \Leftrightarrow (Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset)$
(iv) $\forall x,y \in E$: $(Cl(x) = Cl(y))$ ou $(Cl(x) \cap Cl(y) = \emptyset)$

Corollaire : $\forall x,y \in E , (x \Re y) \Leftrightarrow (Cl(x) = Cl(y))$

Exple :

Soit E l'ensemble des droites du plan et soit la relation « être parallèle à » .
Soit $D \in E$,

$$Cl(D) = \{ \text{droites parallèles à } D \}$$

Remarque : Cl(x) est une partie de E
$Cl(x) \in P(E)$
$Cl(x) \subset E$

Déf : Soit E ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$. Soit $x \in E$, alors tout élément de Cl(x) est un <u>représentant</u> de Cl(x).
x est un représentant de Cl(x) .
Si on a y tel que $x \, \mathfrak{R} \, y$, alors y est aussi un représentant de Cl(x) .

<u>Ensemble des représentants des classes d'équivalence dans E par la relation $\mathfrak{R}$:</u>

Cela consiste à prendre A partie de E telle que : quelle que soit la classe d'équivalence de E , il existe **un et un seul** élément de cette classe appartenant à A.
(on a choisi un représentant et un seul dans chaque classe)

Déf : Soit E un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties non-vides de E telles que :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E \text{ et } \forall\, i , j \in I \ , i \neq j \ , A_i \cap A_j = \varnothing$$

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme <u>une partition de E</u> .

Prop : Toute relation d'équivalence sur un ensemble E définit par ses classes d'équivalence une partition de E.

Prop : Soit E un ensemble .Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E ,alors les $(A_i)_{i\in I}$ sont les classes d'équivalence d'une relation $\mathfrak{R}$ sur E.

Ensemble quotient :

Déf : Soit E un ensemble, $\mathfrak{R}$ relation d'équivalence sur E.
L'ensemble quotient de E par $\mathfrak{R}$, noté $E/\mathfrak{R}$, est défini par :

$$E/\mathfrak{R} = \{ Cl(x) , x \in E \}$$

Si A est un ensemble de représentants , alors : $E/\mathfrak{R} = \{ Cl(x) , x \in A \}$

Remarque : $E/\mathfrak{R}$ est une partie de P(E) ($E/\mathfrak{R} \subset P(E)$, $E/\mathfrak{R} \in P(P(E))$)

Surjection canonique :

On définit la surjection canonique de E dans $E/\mathfrak{R}$ par :

$\Pi : E \to E/\mathfrak{R} , x \mapsto Cl(x)$

4) <u>Relation d'ordre :</u>

Soit E un ensemble, muni de $\prec$ relation d'ordre.

Déf : On dit que $\prec$ est une <u>relation d'ordre totale</u> si :
$\forall$ x,y $\in$ E, (x $\prec$ y) ou (y $\prec$ x)

Une relation d'ordre qui n'est pas totale est dite <u>partielle</u>
.

Si (x $\prec$ y) ou (y $\prec$ x) , on dit que x et y sont <u>comparables</u> .

Remarque : Pour une relation d'ordre total, tous les éléments sont comparables et réciproquement.

Exples :

- Sur **R**, $\leq$ est une relation d'ordre totale.
- Sur $\mathbf{N}^*$, la relation « | » (=divise) est une relation d'ordre partielle.En effet, 2 et 5 , par exemple, ne sont pas comparables : 2 ne divise pas 5 et 5 ne divise pas 2 .

Déf : Soit A une partie non vide de E. Soit x élément de A.
On dit que x est <u>le plus grand élément de A</u> si : $\forall$ y $\in$ A , y $\prec$ x

On définit de même le plus petit élément.

Déf : Soit $x \in A$, on dit que x est <u>maximal</u> si : $\forall y \in A$, $(x \prec y) \Rightarrow (x = y)$.

On définit de même l'élément minimal .

Exple :

1) Soit **R** avec $\leq$. Soit A =] 0 ; 1]

Alors, 1 est le plus grand élément de A et c'est le seul élément maximal de A.
Il n'y a pas de plus petit élément , ni d'élément minimal.

2) Soit $\mathbf{N}^*$ avec « | » . Soit A ={2,3,6,7,12}

A n'a pas de plus grand élément : aucun élément de A n'est divisible par tous les autres.
A n'a pas de plus petit élément.
Les éléments maximaux de A sont 7 et 12 .
Les éléments minimaux de A sont 2,3 et 7.

Remarque : A' = {2,3,6}
6 est le plus grand élément et le seul maximal.
2 et 3 sont minimaux.

S'il existe un plus grand élément dans A , celui-ci est unique.

Déf : Soit $x \in E$, on dit que x est <u>un majorant</u> de A si :
$\forall a \in A , a \prec x$.
On définit de même le minorant.

Déf : Soit M l'ensemble des majorants de A . Si M admet un plus petit élément alors c'est <u>la borne supérieure</u> de A.On la note $\sup_E A$.

On définit de même la borne inférieure.

Exples :

Soit **R** muni de $\leq$ et soit A =[0 ;1 [

$\sup_{\mathbf{R}} A = 1$ et $\inf_{\mathbf{R}} A = 0$.

Soit **Q** avec $\leq$:

Soit $A = \{ x \in \mathbf{Q} , x^2 < 2 \}$. 5 et 7 sont des majorants de A.

Cependant A n'a pas de borne supérieure . (car $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$)

Remarque : Si A possède un plus grand élément, c'est sa borne supérieure.