

Troisième E	Corrigé du devoir n°5 : Racines carrées	Fait le 22/02/12
-------------	--	------------------

Exercice 1 :

$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{5} + 5 \right)^2$	$B = (3\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$	$C = (11\sqrt{3} + 1)(11\sqrt{3} - 1)$
$= \left(\frac{\sqrt{3}}{5} \right)^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{5} \times 5 + 5^2$ $= \frac{3}{25} + 2\sqrt{3} + 25$ $= \frac{3}{25} + \frac{625}{25} + 2\sqrt{3}$ $=$ $\frac{628}{25} + 2\sqrt{3}$	$= (3\sqrt{7})^2 - 2 \times 3\sqrt{7} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$ $= 9 \times 7 - 6\sqrt{14} + 2$ $= 65 - 6\sqrt{14}$	$= (11\sqrt{3})^2 - 1^2$ $= 121 \times 3 - 1$ $= 363 - 1$ $= \underline{\underline{362}}$

Exercice 2 :

Calcul du périmètre du quadrilatère ABCD :

$$P = AB + BC + CD + DA$$

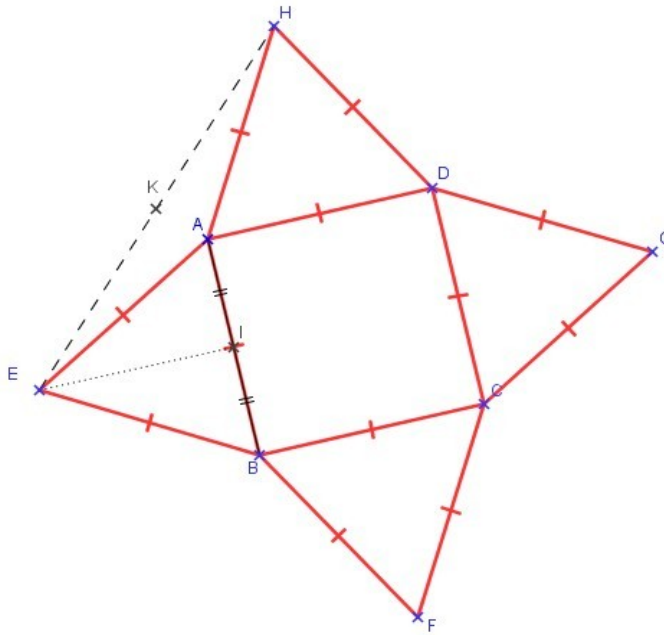
$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{125} + 9\sqrt{80} + 12\sqrt{500} + 3\sqrt{245} \\
 &= 2\sqrt{5 \times 25} + 9\sqrt{5 \times 16} + 12\sqrt{5 \times 100} + 3\sqrt{5 \times 49} \\
 &= 2\sqrt{25} \times \sqrt{5} + 9\sqrt{16} \times \sqrt{5} + 12\sqrt{100} \times \sqrt{5} + 3\sqrt{49} \times \sqrt{5} \\
 &= 10\sqrt{5} + 36\sqrt{5} + 120\sqrt{5} + 21\sqrt{5} \\
 &= \\
 &\quad \boxed{187\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit $a = \sqrt{2}(3 + \sqrt{5})$ et $b = 6 - \sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (\sqrt{2}(3 + \sqrt{5}))^2 + (6 - \sqrt{5})^2 \\
 &= (3\sqrt{2} + \sqrt{10})^2 + 36 - 2 \times 6 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\
 &= (3\sqrt{2})^2 + 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{10} + (\sqrt{10})^2 + 41 - 12\sqrt{5} \\
 &= 9 \times 2 + 6\sqrt{20} + 10 + 41 - 12\sqrt{5} \\
 &= 18 + 10 + 41 + 6\sqrt{4 \times 5} - 12\sqrt{5} \\
 &= 69 + 12\sqrt{5} - 12\sqrt{5} \\
 &= \underline{\underline{69}} \text{ et } 69 \text{ est bien un entier}
 \end{aligned}$$

Exercice 4 :



2) a) Le triangle EAB est équilatéral. I est milieu de [AB].

Alors (EI) est médiane du triangle EAB.

Or, dans un triangle équilatéral, toute médiane est aussi bissectrice, hauteur et médiatrice.

Alors, $(EI) \perp (AB)$

Dans le triangle EIA, rectangle en I, on a :

$$\sin \widehat{EAI} = \frac{EI}{EA}.$$

Dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux et valent 60° chacun.

$$\text{D'où : } \sin 60^\circ = \frac{EI}{5} \quad \text{c'est-à-dire : } EI = 5 \times \sin 60^\circ = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc en valeur exacte,

$$EI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \underline{\text{Rappel :}} \text{ aire(triangle)} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$\text{Aire(ABE)} = \frac{AB \times EI}{2} = \frac{5 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \quad (\simeq 10,83 \text{ cm}^2)$$

c) Aire(ABCD) = $5^2 = 25$ et les quatre triangles équilatéraux sont identiques, d'où :

$$\text{Aire(quatre triangles)} = 4 \times \frac{25\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

Par conséquent :

$$A = 25 + 25\sqrt{3}$$

3) On a $\widehat{HAE} + \widehat{HAD} + \widehat{DAB} + \widehat{BAE} = 360^\circ$

Or : $\widehat{HAD} = 60^\circ$, $\widehat{DAB} = 90^\circ$ et $\widehat{BAE} = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \widehat{HAE} &= 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 60^\circ) \\ &= 360^\circ - 210^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \widehat{HAE} = 150^\circ$$

Comme $AE = AH$, le triangle HAE est isocèle en A.

Propriété : Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base sont égaux.

C'est-à-dire $\widehat{HEA} = \widehat{EHA}$

Or, dans un triangle, la somme des angles fait toujours 180°

D'où : $\widehat{HEA} + \widehat{EHA} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

$$\text{Donc } \widehat{HEA} = \frac{30^\circ}{2} =$$

4) a) K est le milieu de [EH]. Alors, [AK] est la médiane issue du sommet principal du triangle isocèle HAE.

Propriété : Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est médiatrice.

Ce qui a pour conséquence que $(AK) \perp (EH)$. Autrement dit, le triangle AKE est

en K.

Dans ce triangle, $\sin \widehat{KEA} = \frac{AK}{EA}$

D'où : $\sin 15^\circ = \frac{AK}{5}$ c'est-à-dire : **$AK = 5 \times \sin 15^\circ (\approx 1,3 \text{ cm})$**

b) Dans le triangle AKE, rectangle en K, on a : $\cos \widehat{KEA} = \frac{KE}{AE}$

D'où : $\cos 15^\circ = \frac{KE}{5}$ c'est-à-dire : **$KE = 5 \times \cos 15^\circ (\approx 4,8 \text{ cm})$**

c) Aire(HAE) = 2 x aire(KAE) (car (AK) est axe de symétrie du triangle HAE)

Or, Aire(KAE) = $\frac{EK \times KA}{2} = \frac{25 \times \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ}{2}$

Donc **Aire(HAE) = 2 x $\frac{25 \times \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ}{2} = 25 \times \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ$**

A la calculatrice, $25 \times \sin 15^\circ \times \cos 15^\circ = 6,25$

Donc : **Aire(HAE) = 6,25 cm²**

5) a) Dans la question 2)c), on a calculé que $A = 25 + 25\sqrt{3}$

Or, $A' = \text{Aire}(EFGH) = A + 4 \times \text{Aire}(HAE)$
 $= 25 + 25\sqrt{3} + 4 \times 6,25$
 $= 25 + 25\sqrt{3} + 25$

Donc :

$$A' = 50 + 25\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } A' / A &= \frac{50 + 25\sqrt{3}}{25 + 25\sqrt{3}} = \frac{\cancel{25} \times (2 + \sqrt{3})}{\cancel{25} \times (1 + \sqrt{3})} = \frac{(2 + \sqrt{3}) \times (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}) \times (1 - \sqrt{3})} = \frac{2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3}{1 - 3} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$