Classe de Troisième	**Chapitre III: Racines carrées**	Année scolaire 2007/2008

I) Racine carrée d'un nombre positif :

La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif dont le carré est égal à x.

Notation : on le note $\sqrt{x}$ (racine carrée de x)

Exemples :

$\sqrt{36}$ = 6 car 6^2 = 36 $\sqrt{1}$ = 1 car 1^2 = 1

Remarques :

- la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. (ATTENTION)
- Utilisation de la calculatrice : Bien penser à refermer les parenthèses.
- Une racine carrée n'est pas toujours un entier, il faut alors en donner une valeur approchée.

Exemple : $\sqrt{51} \simeq$ 7,14143 (valeur approchée à 10^{-5} près)

$\simeq$ 7,14 (valeur approchée à 10^{-2} près)

$\sqrt{49,5} \simeq$ 7,04 (valeur approchée à 10^{-2} près). (Attention, le chiffre des millièmes était de 5, on arrondit donc au-dessus)

II) Règles de calculs sur les radicaux :

Exemple :

$\sqrt{36}$ = 6 et on peut écrire $\sqrt{36} = \sqrt{9 x 4}$

Or, $\sqrt{9}$ = 3 et $\sqrt{4}$ = 2 d'où $\sqrt{9}$ x $\sqrt{4}$ = 3x2=6

Donc : $\sqrt{9 x 4} = \sqrt{9}$ x $\sqrt{4}$

Attention , cette constatation ne constitue pas une preuve !

1) Propriété 1 : Si a et b sont deux nombres positifs, alors :

$$\boxed{\sqrt{axb} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

Exemple :

$\sqrt{48} = \sqrt{16 x 3}$

$= \sqrt{16} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times \sqrt{3}$

$= \underline{4}\sqrt{3}$

2) Propriété 2 : Si a et b sont deux nombres positifs (avec b≠0), alors :

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

Exemple :

$\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}$

Démonstration de la proposition 1) :

Soient a et b, deux nombres positifs :

On veut démontrer que $\sqrt{axb} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Mettons le membre de gauche au carré :
$\sqrt{axb}^{\,2}$ = axb
Mettons le membre de droite au carré :
$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$
$= a \times b$
D'où $(\sqrt{axb})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$
$(\sqrt{axb})^2 - (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = 0$

<u>Rappel :</u> $A^2 - B^2 = (A + B)(A-B)$

$(\sqrt{axb})^2 - (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{axb} + \sqrt{a} \times \sqrt{b})(\sqrt{axb} - \sqrt{a} \times \sqrt{b}) = 0$

<u>Un produit de facteurs est nul si l'un au moins de ses facteurs est nul.</u>

$\sqrt{axb} = -\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ou $\sqrt{axb} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

- Si a ou b est égal à 0, alors les deux égalités sont vraies.
- Une racine carrée est toujours positive, donc la première égalité est impossible si a et b sont non-nuls.

Par conséquent :

$$\boxed{\sqrt{axb} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

<u>III) Equations $x^2 = a$</u>

<u>Exemple :</u>

On souhaite résoudre l'équation $x^2 = 16$
En passant le 16 dans le membre de gauche, on a $x^2 - 16 = 0$
$x^2 - 16 = x^2 - 4^2$
$= (x + 4)(x - 4)$ (<u>identité remarquable</u> : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$)
D'où l'équation : $(x + 4)(x - 4) = 0$
Si AxB = 0 , alors A = 0 ou B = 0
$x+4 = 0$ ou $x - 4 = 0$
$x = -4$ ou $x = 4$
<u>Les solutions sont :</u> -4 et 4 . En fait les solutions sont $\sqrt{16}$ et $-\sqrt{16}$

<u>*Cas général :*</u>

$x^2 = a$:
- Si a = 0, cette équation n'a qu'une seule solution S = {0}
- Si a > 0, cette équation a deux solutions , $S = \{ \sqrt{a} ; -\sqrt{a} \}$
- Si a < 0 , cette équation n'a pas de solution S = {Ø}

<u>Exemples :</u>

1) <u>Résoudre $x^2 = -4$</u> . Cette équation n'a pas de solution car -4 < 0
2) Résoudre $25x^2 = 64$. Alors $x^2 = \frac{64}{25} > 0$ donc cette équation a deux solutions : $\sqrt{\frac{64}{25}}$ et $-\sqrt{\frac{64}{25}}$

$\sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$ Par conséquent, $S = \{ \frac{8}{5} ; -\frac{8}{5} \}$