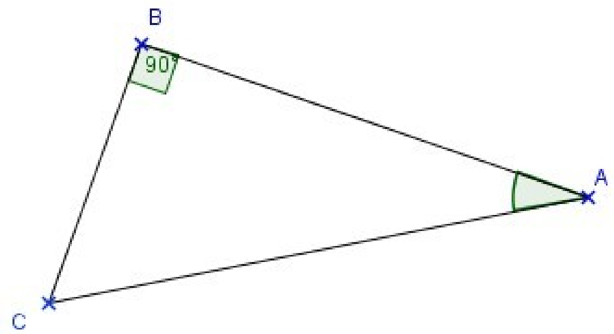
Classe de troisième	**Chapitre VII : Trigonométrie**	Année scolaire 2008/2009

Introduction :
La trigonométrie permet ,depuis bien longtemps, de calculer des longueurs lorsque l'on connaît des angles et des longueurs.
Elle s'est développée durant l'Antiquité grâce aux travaux de certains astronomes qui souhaitaient « arpenter » l'Univers : Aristarque de Samos($III^{ième}$ siècle avt JC),qui cherchait à déterminer les distances Terre-Lune et Terre-Soleil, Hipparque de Nicée ($II^{ième}$ siècle avt JC), Claude Ptolémée ($II^{ième}$ siècle ap JC),etc...
De nos jours, la trigonométrie est aussi utilisée dans des domaines comme les travaux publics ,par exemple, pour estimer des hauteurs de bâtiments ou pour connaître des dénivellations de terrains,etc...

Dans tout ce chapitre, nous ne travaillerons que dans des triangles rectangles.

I) Rappel de quatrième : le cosinus d'un angle aigu

Rappel sur les triangles rectangles :
Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.
Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en B. Le côté [AC] est appelé **l'hypoténuse**
Remarques :
- L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit.
- C'est le côté le plus grand du triangle

L'angle codé sur la figure est l'angle $\widehat{BAC}$.
Le côté [AB] est appelé **côté adjacent à l'angle** $\widehat{BAC}$

En quatrième , on a défini le rapport suivant appelé cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$:

$$\boxed{\text{Cos } \widehat{BAC} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}}}$$

D'où : cos $\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$

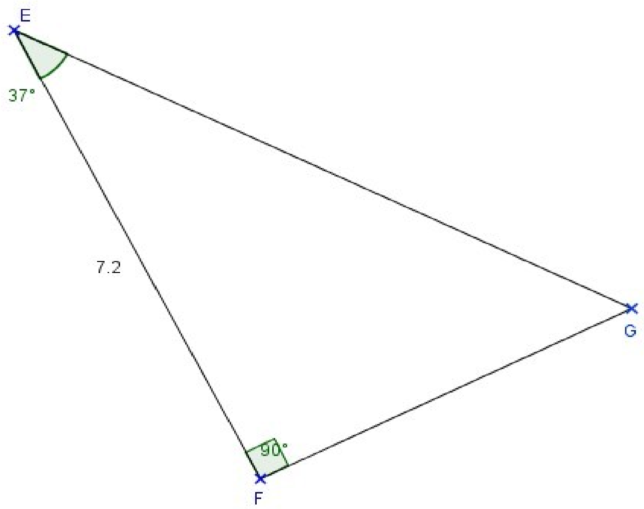
Remarque : **ATTENTION**, cette année, la calculatrice devra systématiquement être en mode **degrés.**

Applications numériques :

1) Calcul d'une longueur :

On donne le triangle EFG rectangle en F tel que $\widehat{FEG}$ = 37° et EF = 7,2 cm.

Question : calculer au mm près la longueur EG



Dans le triangle EFG, rectangle en F, on a :

$$\cos \widehat{FEG} = \frac{FE}{EG}$$

D'où : cos 37° = $\frac{7,2}{EG}$

On calcule EG à l'aide du produit en croix :

$$EG \times \cos 37° = 7,2$$

Alors, EG = $\frac{7,2}{\cos 37^\circ} \simeq 9,0 = 9$

Le côté [EG] mesure environ 9 cm

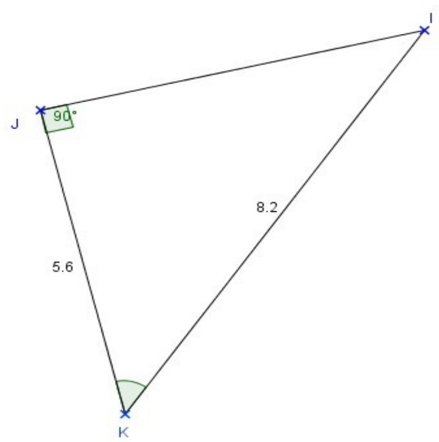
Remarque : ATTENTION aux arrondis !!

2) Calcul d'un angle :

On considère le triangle IJK suivant rectangle en J tel que :

JK = 5,6 cm et IK = 8,2 cm

Question : calculer **au degré près** l'angle $\widehat{JKI}$



Dans le triangle IJK, rectangle en J, on a :

$$\cos \widehat{IKJ} = \frac{JK}{IK}$$

D'où : $\cos \widehat{IKJ} = \dfrac{5,6}{8,2}$

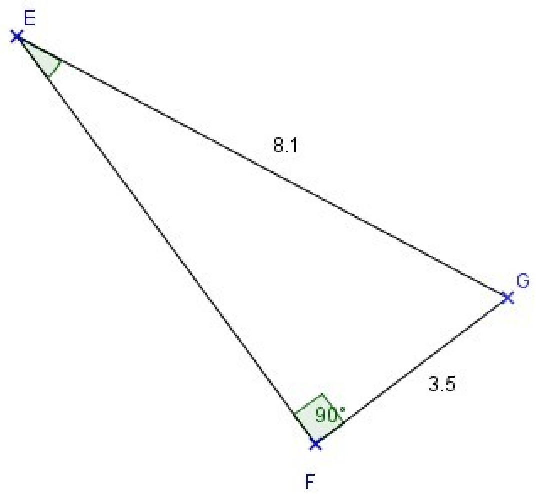
A la calculatrice , on obtient $\widehat{IKJ} \simeq$ **47°**

Pour cela, il faut taper sur shift et Acs (sur les CASIO).
La calculatrice affiche $\cos^{-1}$ et il suffit de taper 5,6 ÷ 7,8 puis EXE

Remarque : si la calculatrice n'est pas en mode degrés, le résultat obtenu est totalement faux !!

II) Sinus et tangente d'un angle aigu :

Dans certains problèmes, on ne pourrait pas utiliser le cosinus de l'angle étudié.
En effet, considérons le problème suivant :
EFG est un triangle rectangle en F tel que FG = 3,5 cm et EG = 8,1 cm.
On souhaite calculer, au degré près, une valeur approchée de l'angle $\widehat{FEG}$.

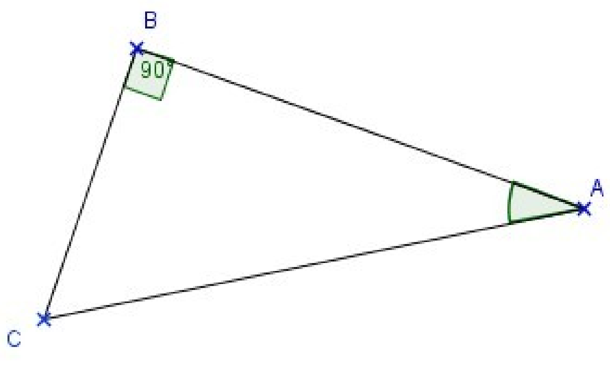


Le côté [FG] n'est pas le côté adjacent à l'angle $\widehat{FEG}$. C'est son côté opposé.
On va alors définir d'autres rapports dans le triangle que le cosinus : le sinus et la tangente.

Remarque :

On pouvait résoudre cette question avec le cosinus de manière plus longue.
En effet, comme EFG est rectangle en F, on peut appliquer le théorème de Pythagore.
Alors, on trouve une valeur approchée de la longueur du côté [EF].
Ayant maintenant le côté adjacent à l'angle $\widehat{FEG}$, on peut appliquer le cosinus.

1) Sinus :



[BC] est <u>le côté opposé</u> à l'angle $\widehat{BAC}$
On définit alors le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$ par :

$$\boxed{\text{Sin } \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{BAC}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}}$$

Remarque :
[BC] est le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$, mais il est aussi le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$

Donc : sin $\widehat{BAC}$ = cos $\widehat{ACB}$

Autrement dit: *Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un des deux angles aigus est égal au sinus de l'autre angle aigu.*
Conséquence : *Si deux angles sont complémentaires (= leur somme est égale à 90°), le sinus de l'un vaut le cosinus de l'autre.*
Exemples : cos 60° = sin 30°   cos 45° = sin 45°   cos 72° = sin 18°

2) Tangente :

Quand on ne connaît pas l'hypoténuse du triangle, mais qu'on a le côté opposé à un angle et le côté qui lui est adjacent, on va utiliser un autre rapport : la tangente.
On définit la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ par la formule :

$$\boxed{\text{Tan } \widehat{BAC} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{BAC}} = \frac{BC}{AB}}$$

III) Formules trigonométriques :

1) Cos, sin et encadrements :

Tout d'abord, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, d'où :
cos $\widehat{BAC}$ < 1 et sin $\widehat{BAC}$ < 1.
Comme ils sont définis par des rapports de longueurs, cos $\widehat{BAC} \geqslant 0$ et sin $\widehat{BAC} \geqslant 0$
Pour résumer :

$$\boxed{0 \leqslant \cos \widehat{BAC} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \sin \widehat{BAC} < 1}$$

2) Lien cos, sin et tan :

Précédemment, nous avons vu que dans le triangle ABC ci-dessus,

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ et $\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB}$

$$\frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}} = \frac{\dfrac{BC}{AC}}{\dfrac{AB}{AC}} = \frac{BC}{\cancel{AC}} \times \frac{\cancel{AC}}{AB} = \frac{BC}{AB} = \tan \widehat{BAC}$$

Donc :

$$\boxed{\tan \widehat{BAC} = \frac{\sin \widehat{BAC}}{\cos \widehat{BAC}}}$$

3) Formule avec les carrés :

On se place encore dans le triangle BAC rectangle en B précédent :

On a toujours :

$\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$

$(\cos \widehat{BAC})^2 = (\dfrac{AB}{AC})^2 = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ et $(\sin \widehat{BAC})^2 = (\dfrac{BC}{AC})^2 = \dfrac{BC^2}{AC^2}$

Alors :

$$(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2 = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$$

Or, le triangle BAC étant rectangle en B, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
D'où : $AC^2 = BC^2 + AB^2$

Donc : $(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2 = \dfrac{AC^2}{AC^2} = 1$

$$\boxed{(\cos \widehat{BAC})^2 + (\sin \widehat{BAC})^2 = 1}$$

<u>Application :</u>

Sachant que $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$, calculer sin 60° en valeur exacte.

On peut appliquer la formule : $(\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2 = 1$

D'où : $(\dfrac{1}{2})^2 + (\sin 60°)^2 = 1$

C'est-à-dire : $(\sin 60°)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

Or, on sait que l'équation $x^2 = \dfrac{3}{4}$ possède deux solutions(car $\dfrac{3}{4} > 0$) : $-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$ et $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

C'est-à-dire : $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Cependant, on a vu dans la partie III) 1) que $\sin 60° \geqslant 0$
Par conséquent en valeur exacte :

$$\boxed{\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$