EXERCICE 1 : (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

2) On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$n\,w_n = (n+1)\,w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a) Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

EXERCICE 2 : (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+xe^{-x}\right)$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

PARTIE I

1) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathrm{A}(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On se propose de majorer $\mathrm{A}(\lambda)$ à l'aide de deux méthodes différentes.

1) Première méthode.

a) Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathrm{A}(\lambda)$.

b) Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq\lambda\times f(1)$.

2) Deuxième méthode.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ en fonction de λ .

b) On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.
Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathrm{A}(\lambda)\leq-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.

3) ***Application numérique.***

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième.
Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda=5$?

EXERCICE 3 : (5 points)

Commun à tous les candidats

I *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leq n$ *alors* $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leq p < n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

II Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.

On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1) a) On note A l'événement «obtenir deux jetons blancs».
Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

b) On note B l'événement «obtenir deux jetons portant des numéros impairs».
Calculer la probabilité de B.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2) Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x,y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x-5y=3$.

b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m=8p+1$ et $m=5q+4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9$ (modulo 40).

c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.

2) Soit n un nombre entier naturel.

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$ (modulo 7).

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a\times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$ (modulo 7).

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

ANNEXE 1
Exercice 2

(À rendre avec la copie)