Corrigé du Bac session 2017
(spécialité)

Exercice 1 :

Partie A

$$h(x) = xe^{-x}, \text{ sur } [0;+\infty[$$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, d'où : une forme indéterminée.

Or, $xe^{-x} = \dfrac{x}{e^{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

2) h est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$

et $h'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

$= e^{-x}(1-x)$. Pour tout $x \in [0;+\infty[$, $e^{-x} > 0$

$1-x \geq 0 \iff x \leq 1$. D'où $h'(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0;1]$

et $h'(x) < 0$, pour tout $x \in]1;+\infty[$

D'où le tableau de variations de h :

x	0		1		$+\infty$
Signe de h'		+	0	−	
Variation de h	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$h(0) = 0$ $\quad h(1) = \dfrac{1}{e}$

3) a) Soit $x \in [0;+\infty[$:

$$e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x} = h(x)$$

b) Soit $x \longmapsto e^{-x}$, sur $[0;+\infty[$

Une primitive de cette fonction est $x \longmapsto -e^{-x}$

En effet : si on note $f_1(x) = -e^{-x}$, alors $f_1'(x) = e^{-x}$.

c) Comme $h(x) = e^{-x} - h'(x)$,

une primitive de h' est h et d'après la question 3b), une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$

Donc une primitive de h est : $x \mapsto -e^{-x} - h(x)$

Partie B

$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1)$ $\qquad$ $g(x) = \ln(x+1)$

1) Soit $x \in [0;+\infty[$:

$M(x; f(x))$ $\qquad$ $N(x; g(x))$

a) $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$ (car le repère est orthonormé)

$= \sqrt{(g(x) - f(x))^2}$, or, $g(x) - f(x) = -xe^{-x} < 0$, sur $[0;+\infty[$

d'où $MN = f(x) - g(x) = xe^{-x} = h(x)$.

Or, d'après les variations de h étudiées dans la question 2) de la partie A

h atteint son maximum en $x = 1$ et ce maximum vaut $\frac{1}{e}$

b) Voir courbes.

2) $\alpha \in [0;+\infty[$, D_α : domaine du plan délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$

a) Voir courbes

b) $A_\alpha = \int_0^\alpha (f(x) - g(x))dx = \int_0^\alpha xe^{-x}dx = \left[-e^{-x} - h(x)\right]_0^\alpha$ (d'après 3c))

$= -e^{-\alpha} - h(\alpha) + 1 + h(0)$

$= -e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha} + 1$

$= -\frac{1}{e^\alpha} - \frac{\alpha}{e^\alpha} + 1 = 1 - \frac{\alpha+1}{e^\alpha}$

c) D'après Question 1) partie A, $\lim\limits_{d \to +\infty} R(d) = 0$

Donc $\underline{\lim\limits_{d \to +\infty} A_d = 1}$

3) En programmant cet algorithme sur la calculatrice.

Exemple sur CASIO Graph 35+ :

```
?→S ↵
0→L ↵
While 1-(L+1)÷e^L<S ↵
 L+1→L ↵
WhileEnd ↵
L
```

on obtient $\boxed{d = 3}$

b) Cet algorithme donne le plus petit entier naturel d à partir duquel $A(d) > S$

Exercice 2 :

$P : 2x - z - 3 = 0 \qquad A(1; a; a^2),\ a \in \mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$:

1) $2x_A - z_A - 3 = 2 \times 1 - a^2 - 3 = -1 - a^2 = -(1 + a^2)$

Or, $a^2 \geq 0$, d'où $1 + a^2 \neq 0$, donc $2x_A - z_A - 3 \neq 0$

c'est-à-dire $\underline{A \notin P}$

2) a) $A \in D$ et $D \perp P$

Soit $\vec{u}(2; 0; -1)$, $\vec{u}$ est un vecteur normal à P

Comme $D \perp P$, alors $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

Soit $M(x; y; z) \in D$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

d'où : Il existe $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = 2t \\ y - y_A = 0 \\ z - z_A = -t \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.}$$

b) $M(x;y;z) \in D$, d'après 2a), $M(2t+1\,;\,a\,;\,a^2-t)$ (4)

$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2}$, car le repère est orthonormé

$= \sqrt{(2t+\cancel{1}-\cancel{1})^2 + (\cancel{a}-\cancel{a})^2 + (\cancel{a^2}-t-\cancel{a^2})^2}$

$= \sqrt{4t^2 + t^2}$

$AM = \sqrt{5t^2} = |t|\sqrt{5}$

3) Comme $H \in D$, il existe $t \in \mathbb{R}$, $H(2t+1\,;\,a\,;\,a^2-t)$

D'autre part, $H \in P$: d'où : $2x_H - z_H - 3 = 0$

c'est-à-dire : $2(2t+1) - (a^2 - t) - 3 = 0$

$\iff 5t = 1 + a^2$

$\iff t = \dfrac{1+a^2}{5}$

D'après la question 2 b), $AH = \frac{1}{5}(1+a^2)\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}a^2$

On pose $f(a) = \frac{\sqrt{5}}{5}a^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}$, $f'(a) = \frac{\sqrt{5}}{5} \times 2a = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$f'(a) = 0 \iff a = 0$ — En $a = 0$, f' s'annule et change de signe avec $f'(a) < 0$, pour $a < 0$ et $f'(a) > 0$, pour $a > 0$

D'où en $a = 0$, f est minimale, c'est-à-dire AH est minimale.

Exercice 3 :

Partie A

1) La proposition C (à savoir $40 < r < 60$ et $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$) propose un encadrement correct pour r et pour θ

2) a) $z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}}$, on a : $60 < r < 80$, $\theta = -\frac{\pi}{3} \in]-\pi\,;\,\pi]$

Le secteur est alors G4

b) $z = -45\sqrt{3} + 45i$. On a $|z| = \sqrt{(-45\sqrt{3})^2 + 45^2} = \sqrt{8100} = 90$

d'où $z = 90 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$

or, $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

d'où $z = 90 e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (on a bien $\frac{5\pi}{6} \in]-\pi ; \pi]$)

Alors: $80 < r < 100$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$

<u>Le secteur correspondant est D5</u>

<u>Partie (B):</u>

$z = 50 e^{i\frac{\pi}{3}}$

M suit $\mathcal{N}(50 ; 25)$ et T suit $\mathcal{N}\left(\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi^2}{144}\right)$

1) A la calculatrice, $P(M < 0) \simeq 7{,}6 \times 10^{-24} \simeq 0$

or, le module d'un nombre complexe est positif.

d'où $\underline{P(M < 0) \simeq 0}$.

2) $P(M \in]40 ; 60[) \simeq 0{,}954$ (à la calculatrice)

(<u>Remarque</u>: M suit $\mathcal{N}(50 ; 25)$

$40 < M < 60$ d'où $-2 < \frac{M-50}{5} < 2$

et $\frac{M-50}{5}$ suit $\mathcal{N}(0 ; 1)$)

3) on a: $P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\right) \simeq 0{,}819$

Pour que la fléchette frappe B3, il faut que $M \in]40 ; 60[$

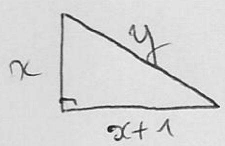
<u>et</u> que $T \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$

or, les évènements sont indépendants

d'où la <u>probabilité cherchée</u> $= P(M \in]40 ; 60[) \times P\left(T \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[\right)$

$\simeq 0{,}954 \times 0{,}819 \simeq \underline{0{,}781}$

Exercice (4) : (Spécialité).



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y est un TRPI, alors $(x;y)$ définit un TRPI.

Partie (A) :

1) $(x;y)$ définit un TRPI $\iff y^2 = x^2 + (x+1)^2$ (Théorème de Pythagore)

$$\iff y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2) * Si $x = 1$: alors $y^2 = 5$ et $y \notin \mathbb{N}$, $(x;y)$ ~~pas~~ ne définit pas de TRPI

* si $x = 2$: alors $y^2 = 13$ et $y \notin \mathbb{N}$, $(x;y)$ ne définit pas de TRP

* si $x = 3$: alors $y^2 = 25$ et $y = 5 \in \mathbb{N}$

donc $(3;5)$ est bien le couple qui définit le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls.

3) a) $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par contraposée :

Supposons n pair, alors : il existe $k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$

d'où $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, avec $2k^2 \in \mathbb{N}$

donc n^2 est pair

Ainsi : si n^2 impair, alors n est impair

b) Soit $(x;y)$ définissant un TRPI :

alors $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ (question 1))

$= 2(x^2 + x) + 1$, avec $x^2 + x \in \mathbb{N}$

d'où y^2 est impair

D'après 3a), alors y est impair

4) Si $(x;y)$ définit un TRPI : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow y \times y - (2x+2)x = 1$

avec $y \in \mathbb{N}$ et $-(2x+2) \in \mathbb{Z}$

D'après le théorème de Bézout, x et y sont premiers entre eux

Partie B :

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3x+2y+1 \\ 4x+3y+2 \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{cases} x' = 3x+2y+1 \\ y' = 4x+3y+2 \end{cases}$

2) a) $y'^2 - 2x'(x'+1) = (4x+3y+2)^2 - 2(3x+2y+1)(3x+2y+2)$

$= 16x^2 + (3y+2)^2 + 8x(3y+2) - 2(9x^2 + 6xy + 6x + 6xy + 4y^2 + 4y + 3x + 2y + 2)$

$= 16x^2 + 9y^2 + \cancel{12y} \cancel{+4} \cancel{+24xy} + 16x - 18x^2 - \cancel{24xy} - 18x - 8y^2 \cancel{-12y} \cancel{-4}$

$= -2x^2 + y^2 - 2x = y^2 - 2x(x+1)$

b) Si $(x;y)$ définit un TRPI, alors $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow y^2 - 2x^2 - 2x = 1$

$\Leftrightarrow y^2 - 2x(x+1) = 1$

or, d'après 2a), $y'^2 - 2x'(x'+1) = y^2 - 2x(x+1)$

d'où $y'^2 - 2x'(x'+1) = 1$

$\Leftrightarrow y'^2 = 2x'^2 + 2x' + 1 \Leftrightarrow (x';y')$ définit également un TRPI

3) $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$ $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$ (8)

Montrons que $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence

- <u>Initialisation</u> : $(x_0 ; y_0) = (3 ; 5)$ définit un TRPI (question 2) partie (A))

<u>La propriété est initialisée</u>

- <u>Hérédité</u> : Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$

Or, d'après 2 b) (Partie (B)), $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ définit un TRPI

<u>La propriété est héréditaire</u>

Comme elle est initialisée et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est-à-dire : <u>Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n ; y_n)$ définit un TRPI</u>

4) A la calculatrice :

Pour $n = 4$, $a_4 = 4059$ et $b_4 = 5741$

avec $a_4 > 2017$ et $b_4 > 2017$

d'où <u>$(4059 ; 5741)$ définit un TRPI</u>

(En effet : $4059^2 + 4060^2 = 32\,959\,081 = 5741^2$)