La calculatrice est autorisée

Exercice 1 :

Calculer les expressions suivantes et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = -\frac{24}{30} \times \frac{55}{72} \times \frac{4}{121} \times \frac{49}{28} \quad ; \quad B = \frac{3 + \frac{8}{25} - \frac{7}{5}}{5 - \frac{11}{5} + \frac{9}{25}} \quad ; \quad C = \frac{\left(\frac{2}{3} + 1\right) \times 3}{\frac{1}{4} + 3 \times (-5) - 2}$$

Exercice 2 :

1) Calculer les deux expressions suivantes :

$$D = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{9}\right)$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

- 2) a) A quel ensemble le plus petit possible parmi les ensembles de nombres vus en classe appartient D ?
b) Même question avec E.

Exercice 3 :

$$F = \frac{72^5 \times 25^7 \times 49^2}{28^6 \times 27^5 \times 50^3}$$

Ecrire F sous la forme : $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

Un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même. (Exemples : $6 = 1 + 2 + 3$ ou $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$)

Euler, mathématicien suisse du XVIII^{ème} siècle, a prouvé en 1749 que tout nombre parfait pair est de la forme $2^n(2^{n+1} - 1)$.

a) Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4
$2^n(2^{n+1} - 1)$				

b) Parmi les quatre nombres précédents, quels sont ceux qui sont parfaits ?

Exercice 5 :

Montrer que $G = \frac{5}{\sqrt{2}-1} - \frac{5}{\sqrt{2}+1} \in \mathbb{N}$

Exercice 6 :

1) Calculer pgcd(37 800 ; 7 875) par la méthode de votre choix.

2) Rendre la fraction suivante irréductible : $\frac{37800}{7875}$

Exercice 7 : Applications astronomiques

1) Compléter le tableau suivant donnant quelques distances dans l'Univers :

	Distances en km	Distances en km en notation scientifique
Terre-Lune	384 400	
Terre-Soleil	149 600 000	
Soleil-Jupiter	7783×10^5	
Soleil-Neptune		$4,5 \times 10^9$
Etoile Polaire-Terre	4 100 000 000 000 000	
Galaxie du Grand Nuage de Magellan-Terre	1530×10^{15}	

2) a) La vitesse de libération à la surface d'un astre est la vitesse minimale qu'il faut donner à un objet sur cet astre pour qu'il s'échappe de son attraction. Sur une planète de masse M (en kg) et de rayon R (en m), cette vitesse est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \text{ où } G \text{ est la constante de gravitation universelle qui vaut}$$

$$G = 6,67 \times 10^{-11}.$$

Calculer la vitesse de libération à la surface de la Terre en km.s^{-1}

ATTENTION aux unités !

(Sachant que la masse de la Terre est d'environ 6×10^{24} kg et que son rayon est de 6 378 km)

Autrement dit, si à la surface de la Terre vous lancez un objet à une vitesse inférieure à celle trouvée à la question a), l'objet retombera toujours. Sinon, il s'échappera à l'infini.

b) On appelle rayon de Schwartzschild d'un astre de masse M la quantité :

$$R_s = \frac{2G \times M}{c^2} \text{ où } c = 3 \times 10^5 \text{ km/s (vitesse de la lumière)}$$

En remplaçant, R de la formule donnant V à la question a) par cette expression, à quoi devient tout simplement égal V ?

Calculer R_s pour la Terre. Ecrire le résultat en notation scientifique.

Lorsqu'un astre atteint son rayon de Schwartzschild, il ne laisse plus s'échapper la lumière, on dit que c'est un trou noir.

c) Sachant que le Soleil a une masse d'environ 2×10^{30} kg, dans une sphère de quel rayon faudrait-il « enfermer » toute la matière du Soleil pour « fabriquer » un trou noir ?

Comparer avec le rayon réel du Soleil : 7×10^5 km.