

Exercice 1 :

1) Avec la calculatrice, calculer les nombres suivants :

a) $53^2 - 52^2 - 51^2 + 50^2$ b) $87^2 - 86^2 - 85^2 + 84^2$ c) $146^2 - 145^2 - 144^2 + 143^2$

2) a) Proposer une expression de la même forme que ci-dessus, puis la calculer.

b) Quelle conjecture peut-on faire quant au résultat obtenu ?

3) a) n désignant un nombre entier naturel. Comment s'écrivent les trois nombres entiers naturels qui suivent n ?

b) Développer et réduire l'expression suivante :

$(n + 3)^2 - (n + 2)^2 - (n + 1)^2 + n^2$

c) En déduire la preuve de la conjecture faite à la question 2b) .

4) Application :

a) Calculer rapidement :

$(234\ 456\ 789\ 872)^2 - (234\ 456\ 789\ 871)^2 - (234\ 456\ 789\ 870)^2 + 234\ 456\ 789\ 869^2$

b) Vérifier ce calcul à la calculatrice. Que constate-t-on ? Expliquer.

Exercice 2 :

Soit a et b deux nombres **strictement positifs** tels que $a < b$.On appelle :

- **Moyenne arithmétique** de ces deux nombres le nombre m égal à $\frac{a+b}{2}$
- **Moyenne géométrique** de ces deux nombres le nombre g égal à \sqrt{ab}
- **Moyenne harmonique** de ces deux nombres le nombre h tel que : $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- **Moyenne quadratique** de ces deux nombres le nombre q égal à $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

1) De quel signe est l'expression suivante $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$?

a) En développant cette expression, en déduire l'inégalité suivante : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

b) Montrer que $m \geq g$

2) a) Montrer que $h = \frac{2ab}{a+b}$

b) Montrer que $hm = g^2$

c) Montrer que $hg \leq hm$, puis que $hg \leq g^2$

En déduire la comparaison de h et g .

3) a) Démontrer que $\frac{2ab}{a+b} - a = \frac{a(b-a)}{a+b}$

b) En déduire $a < h$

4) Comparer m et q

5) Démontrer que $q < b$

6) A l'aide des questions précédentes, ranger dans l'ordre croissant les nombres a , b et les quatre moyennes de ces nombres.