Seconde ROME	**DM n°1 :** *Quelques problèmes historiques sur les nombres*	Année scolaire 2008/2009

Exercice 1 : Le nombre d'or

I) Lien algèbre et géométrie :

a) Tracer un carré ABCD de côté 3 cm

b) On appelle I le milieu de [DC]. Tracer le segment [BI].
Le cercle de centre I et de rayon IB coupe la droite (DC) en E.
Placer le point F pour que AFED soit un rectangle.

c) Calculer la longueur IB. En déduire la longueur DE.

d) Montrer que $\frac{DE}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ce nombre noté Φ s'appelle le nombre d'or. (On retouve ce nombre dans des domaines très variés : architecture, biologie, botanique,etc...)
On le note « phi » en l'honneur de Phidias, à l'origine de la construction du Parthénon d'Athènes dont les proportions respectent ce nombre.

II) Quelques propriétés algébriques de Φ :

1) Calculer Φ à la calculatrice et en donner une approximation à 10^{-4} près.
2) A quel ensemble le plus petit possible semble appartenir Φ ?
3) Montrer que $\Phi - 1 = \Phi^{-1}$
4) Montrer que Φ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$
5) En déduire Φ^2 en fonction de Φ
6) En écrivant que $\Phi^3 = \Phi^2 \times \Phi$, en déduire Φ^3 en fonction de Φ
7) Même question avec Φ^4 et Φ^5
8) En calculant $\Phi^5 - \Phi^4$, qu'obtient-on ? Même chose avec $\Phi^4 - \Phi^3$, $\Phi^3 - \Phi^2$, $\Phi^2 - \Phi$
9) En utilisant la question 8), exprimer de manière simple Φ^6, Φ^7, Φ^8 en fonction de Φ

Exercice 2 : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous forme irréductible $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels.

1) Montrer dans ce cas que $a^2 = 2b^2$
2) a) Montrer que le carré d'un nombre pair 2n ($n \in \mathbb{N}$) est un nombre pair.
   b) Montrer que le carré d'un nombre impair est impair.
3) Des questions 1) et 2) déduire que a est pair.
4) Soit $a = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que $b^2 = 2m^2$
   b) Que peut-on en déduire quant à la parité de b ?
5) Expliquer pourquoi il y a contradiction avec l'hypothèse faite au début.
Que peut-on dire alors du nombre $\sqrt{2}$?

Remarque : *Ce type de raisonnement est appelé raisonnement par l'absurde*