Seconde	**<u>Corrigé du DS n°1 de maths</u>**	30/09/2008

<u>Exercice 1 :</u>

$$A = -\ \frac{24}{30} \times \frac{55}{72} \times \frac{4}{121} \times \frac{49}{28} \qquad\qquad B = \frac{3+\frac{8}{25}-\frac{7}{5}}{5-\frac{11}{5}+\frac{9}{25}}$$

$$= -\ \frac{\cancel{2^3}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{11}\times\cancel{2^2}\times\cancel{7^2}}{2\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{2^3}\times3^2\times11^2\times\cancel{2^2}\times\cancel{7}}$$

$$= \boxed{\frac{-7}{98}}$$

$$= \frac{\frac{75}{25}+\frac{8}{25}-\frac{35}{25}}{\frac{125}{25}-\frac{55}{25}+\frac{9}{25}} = \frac{\frac{48}{25}}{\frac{79}{25}} = \frac{48}{\cancel{25}} \times \frac{\cancel{25}}{79} = \boxed{\frac{48}{25}}$$

$$C = \frac{\frac{\left(\frac{2}{3}+1\right)\times 3}{4}}{\frac{1}{4}+3\times(-5)-2}$$

$$= \frac{\frac{\frac{5}{3}\times 3}{4}}{\frac{1}{4}-15-2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{60}{4}-\frac{8}{4}}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{67}{4}} = \frac{5}{\cancel{4}} \times (-\ \frac{\cancel{4}}{67}) = \boxed{\frac{-5}{67}}$$

<u>Exercice 2 :</u>

1) $D = (1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{3}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times \ldots \times (1 + \frac{1}{9})$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{8}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}$$

$$= \frac{5}{1} = \underline{\mathbf{5}}$$

$E = (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \ldots \times (1 - \frac{1}{9})$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8}}{9}$$

$= \boxed{\dfrac{1}{9}}$

2) a) D est un entier naturel donc **<u>$D \in \mathbb{N}$</u>**

b) E est un rationnel donc **<u>$E \in \mathbb{Q}$</u>**

<u>Exercice 3 :</u>

$$F = \frac{72^5 \times 25^7 \times 49^2}{28^6 \times 27^5 \times 50^3}$$

$$= \frac{(2^3 \times 3^2)^5 \times (5^2)^7 \times (7^2)^2}{(2^2 \times 7)^6 \times (3^3)^5 \times (2 \times 5^2)^3}$$

$$= \frac{2^{15} \times 3^{10} \times 5^{14} \times 7^4}{2^{12} \times 7^6 \times 3^{15} \times 2^3 \times 5^6}$$

$= \underline{\mathbf{2^0 \times 3^{-5} \times 5^8 \times 7^{-2}}}$

<u>Exercice 4 :</u>

a) Pour n = 1 : $2^1 x(2^2 - 1) = 2x3 =$ **<u>6</u>**

Pour n = 2 : $2^2 x(2^3 - 1) = 4x7 =$ **<u>28</u>**

Pour n = 3 : $2^3 x(2^4 - 1) = 8x15 =$ **<u>120</u>**

Pour n = 4 : $2^4 x(2^5 - 1) = 16x31 =$ **<u>496</u>**

b) 6 et 28 sont parfaits (voir l'énoncé !)

Voyons pour 120 et 496 :

Diviseurs de 120 autres que lui-même :{1;2;3;4;5;6;8;10;12;15;20;24;30;40;60}

En additionnant les trois derniers, on trouve déjà : 130 !

Donc **<u>120 n'est pas parfait</u>**

Par contre, 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248

Donc **<u>496 est parfait</u>**

<u>Exercice 5 :</u>

$$G = \frac{5}{\sqrt{2}-1} - \frac{5}{\sqrt{2}+1}$$

<u>Remarque :</u> Pour pouvoir simplifier l'écriture de G, il va falloir « supprimer » les racines aux deux dénominateurs.

Pour cela, on va utiliser l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\text{D'où : } G = \frac{5 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - \frac{5 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}+5-5\sqrt{2}+5}{2-1}$$

$$= \frac{10}{1} = \underline{\mathbf{10}}$$

<u>Donc **$G \in \mathbb{N}$**</u>

<u>Exercice 6 :</u>

1) 37 800 = $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$ et 7 875 = $3^2 \times 5^3 \times 7$

D'où pgcd(37 800;7 875) = $3^2 \times 5^2 \times 7$ *(on prend pour chaque facteur premier la plus*

petite des puissances entre les deux nombres)
C'est-à-dire : **pgcd(37 800;7 875) = 1 575**

2) On a : $\frac{37800}{7875} = \frac{1575\times24}{1575\times5} = \boxed{\frac{24}{5}}$

Exercice 7 :

1)

	Distances en km	Distances en km en notation scientifique
Terre-Lune	384 400	**$3,844\times10^{5}$**
Terre-Soleil	149 600 000	**$1,496 \times 10^{8}$**
Soleil-Jupiter	7783×10^{5}	**$7,783 \times 10^{8}$**
Soleil-Neptune	**4 500 000 000**	$4,5 \times 10^{9}$
Etoile Polaire-Terre	4 100 000 000 000 000	**$4,1 \times 10^{15}$**
Galaxie du Grand Nuage de Magellan-Terre	1530×10^{15}	**$1,530 \times 10^{18}$**

2) a) Calcul de la vitesse de libération à la surface de la Terre :

$$V = \sqrt{\frac{2\times6,67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6,378\times10^{6}}}$$ (ATTENTION aux unités...)

$\simeq$ 11 202

Par conséquent :

la vitesse de libération à la surface de la Terre est d'environ : **11,2 km/s**

b) Si on remplace R par l'expression donnant R_s dans celle de V, on obtient :

$$V = \sqrt{\frac{2\times G\times M}{\left(\frac{2\times G\times M}{c^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2\times G\times M\times c^2}{2\times G\times M}} = \sqrt{c^2} = \underline{c}$$

Autrement dit : *Quand un astre atteint son rayon de Scwarzschild, la vitesse de libération à sa surface est égale à la vitesse de la lumière...*
C'est-à-dire : l'astre ne laisse plus la lumière s'échapper : c'est un trou noir.

Calcul du R_s de la Terre :

$$R_s = \frac{2\times6,67\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{(3\times10^{8})^2} \simeq 9 \times 10^{-3}$$

Le rayon de Schwarzschild de la Terre est d'environ : 9×10^{-3} m *(c'est-à-dire moins de 1 cm...)*

c) Calcul du R_s du Soleil :

$$R_S = \frac{2\times6,67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{(3\times10^{8})^2} \simeq 2,964 \times 10^{3}$$

our « fabriquer » un trou noir avec le Soleil, il faudrait donc enfermer toute sa matière dans une boule d'environ 3 km de rayon alors que son rayon réel est d'environ 700 000 km