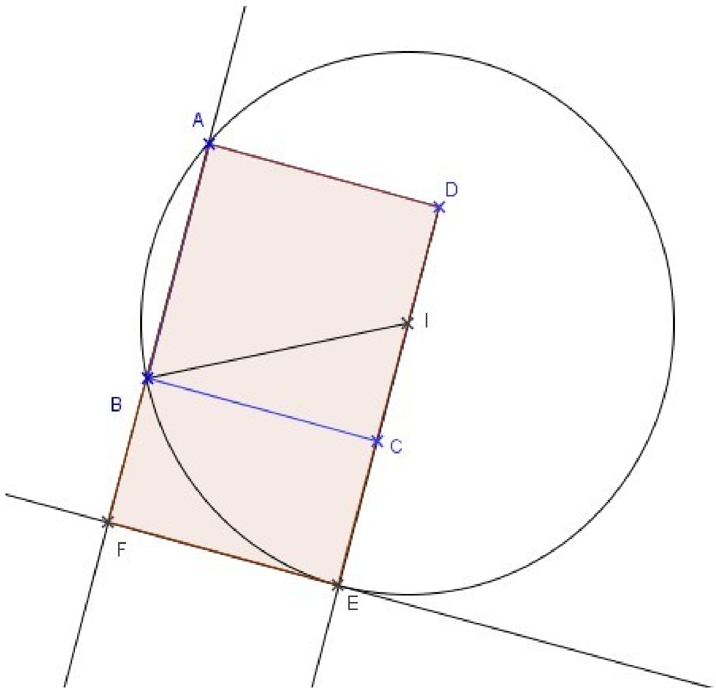
Seconde ROME	**Corrigé du DM n°1 :** *Quelques problèmes historiques sur les nombres*	Année scolaire 2008/2009

Exercice 1 : Le nombre d'or

I) Lien algèbre et géométrie :

a) b)



c) Calcul de IB :

Dans le triangle ICB, rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore :

$$BI^2 = BC^2 + CI^2$$

$$BI^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{36}{4} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{45}{4}$$

D'où : $BI = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 5}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$

Or, E est un point du cercle, donc [IE] est un rayon de ce cercle.

D'où IE = IB.

Alors : $DE = DI + IB = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{DE}{AD} = \frac{\frac{3\times(1+\sqrt{5})}{2}}{3} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

II) Quelques propriétés algébriques de Φ :

1) $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq$ **1,6180**

2) Φ semble être irrationnel.

3) $\Phi - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi^{-1} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{-4}$

$= \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Donc :

$$\boxed{\Phi - 1 = \Phi^{-1}}$$

4) $\Phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\times(1 + 5 + 2\sqrt{5})$

$= \dfrac{1}{4}\times(6 + 2\sqrt{5}) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}+2}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Donc : Φ <u>est solution de l'équation $x^2 = x + 1$</u>

5) On a donc :

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi + 1}$$

6) $\Phi^3 = \Phi^2 \times \Phi = (\Phi + 1) \times \Phi$

$= \Phi^2 + \Phi$

$= \Phi + 1 + \Phi$

Donc :

$$\boxed{\Phi^3 = 2\Phi + 1}$$

7) On raisonne de même avec Φ^4 :

$\Phi^4 = \Phi^3 \times \Phi = (2\Phi + 1) \times \Phi$

$= 2\Phi^2 + \Phi = 2\times(\Phi + 1) + \Phi$

Donc :

$$\boxed{\Phi^4 = 3\Phi + 2}$$

De la même façon, $\Phi^5 = 5\Phi + 3$

8) $\Phi^5 - \Phi^4 = 5\Phi + 3 - (3\Phi + 2)$

$= 2\Phi + 1$

Donc :

$$\boxed{\Phi^5 - \Phi^4 = \Phi^3}$$

$\Phi^4 - \Phi^3 = 3\Phi + 2 - (2\Phi + 1)$

$= \Phi + 1$

Donc :

$$\boxed{\Phi^4 - \Phi^3 = \Phi^2}$$

$\Phi^3 - \Phi^2 = 2\Phi + 1 - (\Phi + 1)$

$= \Phi$

Donc :

$$\boxed{\Phi^3 - \Phi^2 = \Phi}$$

Enfin, $\Phi^2 - \Phi = \Phi + 1 - \Phi = 1$ $(= \Phi^0)$

Remarque :
Autrement dit, chaque puissance de Φ (à partir de 2) est égale à la somme des deux puissances de Φ qui la précède.
(En effet : $\Phi^2 = \Phi^0 + \Phi^1$; $\Phi^3 = \Phi^1 + \Phi^2$; $\Phi^4 = \Phi^2 + \Phi^3$; etc...)
Ce qui rappelle le calcul des termes de **la suite de Fibonacci** : on fixe les deux premiers à 1 et les suivants se calculent en faisant la somme des deux termes qui précédent. D'où la suite : 1,1,2,3,5,8,13,21,34,etc...

9) Comme $\Phi^6 = \Phi^4 + \Phi^5$, alors $\Phi^6 = 3\Phi + 2 + 5\Phi + 3$

$= \boxed{8\Phi + 5}$

$\Phi^7 = \Phi^5 + \Phi^6 = 5\Phi + 3 + 8\Phi + 5$

$= \boxed{13\Phi + 8}$

De même, $\Phi^8 = \Phi^6 + \Phi^7$

$= \boxed{21\Phi + 13}$

Remarque : *Quand on regarde les expressions trouvées, toutes sont de la forme : $a\Phi + b$ où a et b sont des termes de la suite de Fibonacci avec un rang d'écart.*

Exercice 2 : Irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2}$ sous forme irréductible $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers naturels.

1) $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ d'où, en prenant le carré des deux membres de cette égalité :

$2 = \frac{a^2}{b^2}$ c'est-à-dire : $a^2 = 2b^2$

2) a) On pose $X = 2n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) X est pair
$X^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \times 2n^2$ avec $2n^2 \in \mathbb{N}$. Donc X^2 est pair

Donc : **Le carré d'un nombre pair est pair**

b) Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme : $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$
Posons $Y = 2n + 1$
$Y^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2 \times (2n^2 + 2n) + 1$ avec $2n^2 + 2n \in \mathbb{N}$
D'où : Y^2 est un nombre impair

Donc : **Le carré d'un nombre impair est impair**

3) $a^2 = 2b^2$ d'où a^2 est pair, donc **a est pair**

Remarque : *Un nombre entier naturel est soit pair soit impair.*
Si on avait supposé a impair, son carré aurait été impair aussi...

4) $a = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$
a) $a^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2b^2$ d'où : $2m^2 = b^2$
b) Alors, b^2 est pair, donc **b est pair** par le même raisonnement que dans la question 3

5) Si a est pair et b aussi, $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible (on peut diviser numérateur et dénominateur par 2). C'est contradictoire avec l'hypothèse du début.
Par conséquent :

$\boxed{\sqrt{2} \textbf{ est irrationnel}}$