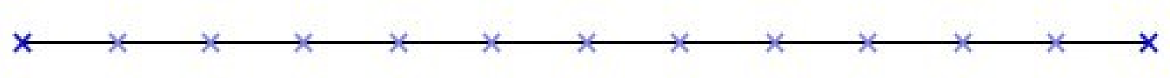
Quatrièmes	**Chapitre n°6** : Théorème de Pythagore et sa réciproque	Année scolaire 2008/2009

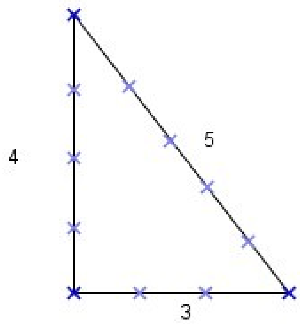
Introduction

Pythagore de Samos (VI^{ème} siècle avant JC) : philosophe et mathématicien grec.
Il a été disciple de Thalès de Milet. Il a fondé une école de pensée : les pythagoriciens dans le sud de l'Italie à Crotone. Pour lui, « le nombre est raison de toute chose ». Pour de plus amples informations, consulter :
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Pythagore.html
Ce que nous appelons actuellement « Théorème de Pythagore » était connu bien avant Pythagore.
On sait, par exemple, que les Egyptiens utilisaient la fameuse corde à treize noeuds pour construire des murs « droits ».

Corde à treize noeuds :

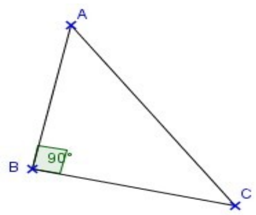


Avec cette corde, on peut construire un triangle 3,4, 5 :



Le triangle obtenu est rectangle.

Activité de découverte du théorème direct :

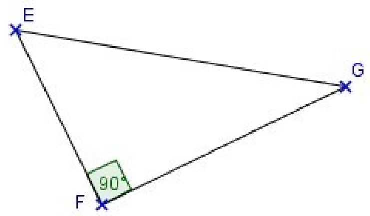


On trace quatre triangles ABC rectangles en B :

	BA	CA	BC	BA²	CA²	BC²	BA²+ BC²
Triangle 1	6,7	8,3	4,9	≃ 44,9	≃68,9	≃24	68,9
Triangle 2	7,2	9,7	6,5	≃ 51,8	≃ 94,1	≃ 42,3	94,1
Triangle 3	3,4	7,6	6,8	≃ 11,6	≃ 57,8	≃ 46,2	57,8
Triangle 4	5	13	12	25	169	144	169

I) <u>Théorème de Pythagore : sens direct</u>

<u>Données :</u> On considère un triangle EFG, rectangle en F :



Enoncé :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

C'est-à-dire : Si EFG est rectangle en F, alors

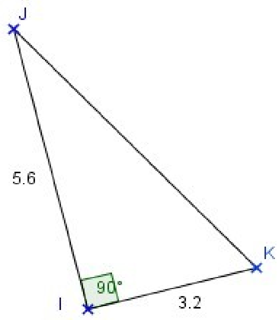
$$\boxed{EG^2 = EF^2 + FG^2}$$

Pour une démonstration « dynamique », cliquer sur :

http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/Quatri%E8mes/2008-2009/activit_th_de_pth.html

<u>Applications :</u>

a) IJK est un triangle rectangle en I tel que IJ = 5,6 cm et IK = 3,2 cm. Calculer KJ.



Le triangle IJK est rectangle en I. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle.

[JK] étant l'hypoténuse de ce triangle,

$$JK^2 = IJ^2 + IK^2$$
$$= 5{,}6^2 + 3{,}2^2$$
$$= 41{,}6$$

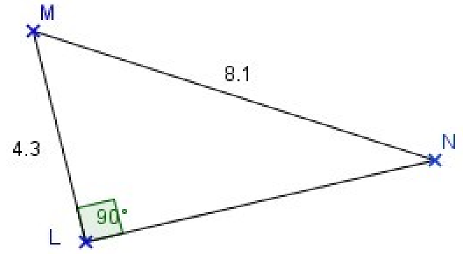
D'où : JK = $\sqrt{41{,}6}$ (se dit « racine carrée de 41,6 »)

A la calculatrice, on tape sur la touche $\boxed{\sqrt{}}$

On obtient **<u>JK ≃ 6,4 cm</u>**

(***<u>ATTENTION</u>*** : la calculatrice affiche pour ce calcul le résultat suivant 6,449806199. Considérer toutes les décimales affichées n'aurait pas de sens, car les instruments de tracés en géométrie ne permettent pas d'aller en-dessous du mm, d'où l'arrondi à un seul chiffre après la virgule...)

b) MNL est un triangle rectangle en L tel que : ML = 4,3 cm et MN = 8,1 cm. Calculer LN.



Dans le triangle MLN, rectangle en L, on applique le théorème de Pythagore :

$$MN^2 = ML^2 + LN^2$$

C'est-à-dire : $8{,}1^2 = 4{,}3^2 + LN^2$
D'où : $LN^2 = 8{,}1^2 - 4{,}3^2$
$LN^2 = 47{,}12$
Donc : $LN = \sqrt{47{,}12} \simeq 6{,}9$

<u>Le côté [LN] mesure environ 6,9 cm</u>

II) <u>Sens réciproque :</u>

Les conditions initiales sont différentes :
On se donne un triangle avec les mesures de ses trois côtés.
La question que l'on se pose : ce triangle est-il rectangle ?

<u>Exemple :</u> On considère le triangle STR tel que ST = 5 cm ,RT = 12 cm et RS = 13 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?
Pour constuire ce triangle à l'écran et conjecturer sa nature, cliquer sur :

http://mangeard.maths.free.fr/Ecole/Quatri%E8mes/2008-2009/reciproque_Pth.html

<u>Enoncé :</u>

> *Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal au carré des deux autres , alors ce triangle est rectangle.*
>
> *C'est-à-dire : Si JKL est un triangle tel que $JK^2 = JL^2 + LK^2$, alors JKL est un triangle rectangle en L*

<u>ATTENTION :</u> *Ne pas dire dans l'énoncé :* « Dans un triangle **<u>rectangle</u>** » car c'est la conclusion. Et ne pas remplacer « le carré du plus grand côté » par « le carré de **<u>l'hypoténuse.</u>**.. » : en effet, pour parler d'hypoténuse, il faut que le triangle soit rectangle !!

<u>Applications :</u>

a) On considère le triangle FPK tel que FP = 6 cm PK = 4,5 cm et KF = 7,5 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

On calcule le carré du plus grand côté :
$KF^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$
Puis, on calcule la somme des carrés des deux autres côtés :
$FP^2 + PK^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$
Alors : $KF^2 = FP^2 + PK^2$
La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée :

Donc : **<u>Le triangle FPK est rectangle en P</u>**

ATTENTION : Quand on utilise la réciproque du théorème de Pythagore, on ne part pas de l'égalité déjà vraie, il faut la vérifier.
C'est pourquoi on commence par calculer le carré du plus grand côté d'une part, puis la somme des carrés des deux autres côtés d'une autre part.

REMARQUE concernant la notion de contraposée :
Considérons une propriété (P) écrite sous la forme générale suivante :

(P) : Si $\boxed{\text{hypothèse}}$ **, alors** $\boxed{\text{conclusion}}$

Ce qui revient à dire :

Si $\boxed{\text{pas la conclusion}}$ **, alors** $\boxed{\text{pas l'hypothèse}}$

Cette deuxième formulation s'appelle **la contraposée** de la propriété (P)

Les deux formulations sont équivalentes

Exemple avec le théorème de Pythagore :

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Contraposée de cette propriété : [BC] étant le plus grand côté,

Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$,alors ABC n'est pas un triangle rectangle

b) On considère le triangle DTM tel que DT = 6,3 cm , MT = 4,2 cm et MD = 7,5 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

On calcule le carré du plus grand côté : $MD^2 = 7,1^2 = 56,25$
Puis, la somme des carrés des deux autres côtés : $DT^2 + MT^2 = 6,3^2 + 4,2^2 = 57,33$
Alors, $MD^2 \neq DT^2 + MT^2$
D'après la contraposée du théorème de Pythagore,

le triangle DTM n'est pas rectangle