Quatrièmes	**Chapitre n°4** : Puissances	Année scolaire 2008/2009

Introduction :

Dans différents domaines, on est amené à utiliser de très grands ou de très petits nombres.(*Exemple :* Astronomie, chimie, physique, biologie,etc...)
Cependant, ces nombres sont assez fastidieux à écrire.
D'où l'introduction de la notation puissance plus « compacte » que l'écriture « classique ».

I) Puissances de dix :

Exemple :
$100 = 10 \times 10 = 10^2$
$1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$

De façon générale,

Si $n \in \mathbb{N}$, $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\underbrace{000\,000 \dots 000}_{n \text{ zéros}}$

10^4 se prononce « 10 exposant 4 » ou « 10 puissance 4 »
Exemples :
1 million = 1 000 000 = 10^6
1 milliard = 1 000 000 000 = 10^9
$1 = 10^0$
Remarque « informatique » :
1 mégaoctet = 1 million d'octets = 10^6 octets
1 gigaoctet = 1 milliard d'octets = 10^9 octets
1 téraoctet = mille milliards d'octets = 10^{12} octets

Si n est un entier naturel, $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$

$10^{-n} = \underbrace{0,000\,000\,000 \dots 000}_{n \text{ zéros en tout}}\,1$

Exemple : 10^{-2} = 1 centième = $\dfrac{1}{10^2}$ = 0,01

1) Régles de calcul :

Exemple :
$10 \times 1000 = 10\,000$
C'est-à-dire : $10^1 \times 10^3 = 10^4$ (*remarque* : 1 + 3 = 4 !)

Si m et n sont deux entiers relatifs :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$
$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$
$$(10^m)^n = 10^{m\times n}$$

<u>Exemples :</u>

$10^5 \times 10^{12} = 10^{5+12} = 10^{17}$

$10^{-3} \times 10^2 = 10^{-3+2} = 10^{-1}$

$\frac{10^{12}}{10^{-6}} = 10^{12-(-6)} = 10^{12+6} = 10^{18}$

$10^5 \times 10^{-4} \times \frac{10^5}{10^{-2}} \times (10^7)^3 = 10^{5+(-4)} \times 10^{5-(-2)} \times 10^{7\times 3}$

$= 10^1 \times 10^7 \times 10^{21}$

$= 10^{1+7+21}$

$= \underline{\mathbf{10^{29}}}$

<u>2) Ecriture scientifique :</u>

<u>a) Définition :</u>

L'écriture scientifique d'un nombre est l'écriture de ce nombre sous la forme $a \times 10^p$, où a est un nombre décimal qui a un seul chiffre différent de zéro avant la virgule et p est un entier relatif.

<u>Exemples :</u>

$3,3456571 \times 10^7$ est l'écriture scientifique du nombre 33 456 571 car 3,3456571 est un nombre décimal avec un seul chiffre différent de zéro avant la virgule et 7 est un entier relatif.

$0,456 \times 10^{-2}$ **<u>n'est pas une écriture scientifique</u>** car 0,456 a 0 comme chiffre avant la virgule.

<u>b) Méthode pour trouver la notation scientifique d'un nombre :</u>

<u>Exemple :</u> On souhaite écrire la notation scientifique du nombre suivant:
$4\,678,34 \times 10^6$

- On commence par écrire 4 678,34 sous la forme d'un produit d'un nombre décimal ayant un seul chiffre avant la virgule différent de zéro par une puissance de 10 :
$4\,678,34 = 4,67834 \times 10^3$
- On donne l'écriture finale en utilisant les règles de calcul vues dans le 1)
$4\,678,34 \times 10^6 = 4,67834 \times 10^3 \times 10^6 = 4,67834 \times 10^{3+6} = \underline{\mathbf{4,67834 \times 10^9}}$

<u>Remarque :</u> La calculatrice utilise fréquemment la notation scientifique quand les nombres manipulés sont très petits ou très grands.

<u>II) Puissances d'un nombre relatif :</u>

1) <u>Définitions :</u>

a) Soit a un entier relatif non-nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

Se lit : « a exposant n » ou « a puissance n »

b) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

c) $a^1 = a$ et $a^0 = 1$

<u>Cas particuliers :</u> a^2 se lit « a au carré » et a^3 se lit « a au cube »

<u>Exemples :</u>

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \underline{32}$

$3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

<u>2) Règles de calcul sur les puissances :</u>

a) On retrouve le même type de règles que pour le cas des puissances de 10 :

Si a désigne un nombre relatif non-nul, m et n deux entiers relatifs :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

<u>Exemples :</u>

$5^3 \times 5^7 = 5^{3+7} = \underline{\mathbf{5^{10}}}$

$4^{-3} \times (4^6)^2 = 4^{-3} \times 4^{6\times 2} = 4^{-3} \times 4^{12} = 4^{-3+12} = \underline{\mathbf{4^9}}$

$\dfrac{11^9}{11^{-2}} = 11^{9-(-2)} = 11^{9+2} = \underline{\mathbf{11^{11}}}$

b) D'autres règles de calcul :

Si a et b sont deux entiers relatifs non-nuls, m et n deux entiers relatifs :

$$(ab)^n = a^n \times b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

<u>Exemples :</u>

$24^5 = (6 \times 4)^5 = 6^5 \times 4^5$

$\dfrac{81}{16} = \dfrac{3^4}{2^4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4$