Premières S — Corrigé de l'examen n° 2 (Fait le 16/05/17)

Exercice 1 : /20

1) $\frac{3}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$

On va donc résoudre l'inéquation sur $\mathbb{R}^*$

$$\frac{3}{x} \leq x+2$$

$$\iff \frac{3}{x} - (x+2) \leq 0$$

$$\iff \frac{3 - x(x+2)}{x} \leq 0$$

$$\iff \frac{-x^2-2x+3}{x} \leq 0$$

Signe de $-x^2-2x+3$:

2

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times(-1)\times 3 = 16 > 0$

Le binôme admet 2 racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{-2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-4}{-2} = 1$$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

or, $a = -1 < 0$

D'où $-x^2-2x+3 \geq 0$ pour $x \in [-3;1]$

et $-x^2-2x+3 < 0$ pour $x \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{-x^2-2x+3}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où

$S = [-3;0[\cup [1;+\infty[$

2

2) $(d_1) : y = \frac{x}{4} + 8$ $\quad (d_2) : 3x + 2y + 12 = 0$

$3x + 2y + 12 = 0 \iff 2y = -3x - 12$

$\iff y = -\frac{3}{2}x - 6$

$a_{(d_1)} \neq a_{(d_2)}$, d'où (d_1) et (d_2) sont sécantes.

Soit $M(x ; y)$ leur point d'intersection :

2

$(x ; y)$ est solution du système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 8 \\ y = -\frac{3}{2}x - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 8 \\ \frac{1}{4}x + 8 = -\frac{3}{2}x - 6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 8 \\ \frac{7}{4}x = -14 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 8 = \frac{1}{4} \times (-8) + 8 = 6 \\ x = -14 \times \frac{4}{7} = -8 \end{cases}$$

Donc $\underline{M(-8 ; 6)}$ point d'intersection de (d_1) et (d_2)

3)

$f(x) = -x^2 + x + 4$, $a = -1$.

f dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où en particulier en $a = -1$

(T_{-1}) : tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en $a = -1$

2

$(T_{-1}) : y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

Or, $f'(x) = -2x + 1$

d'où $f'(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$

et $f(-1) = -(-1)^2 - 1 + 4$

$= -1 - 1 + 4 = 2$

Donc : (T_{-1}) admet pour équation réduite $y = 3(x+1) + 2$

c'est-à-dire $\underline{y = 3x+5}$

4) $f(x) = \dfrac{-3x}{1+x^2}$ f est dérivable partout où elle est définie car c'est un quotient.

d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $1+x^2 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

On pose $u(x) = -3x$ $\quad u'(x) = -3$
$v(x) = 1+x^2$ $\quad v'(x) = 2x$

Or, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où $f'(x) = \dfrac{-3(1+x^2) - 2x(-3x)}{(1+x^2)^2}$

2

$= \dfrac{-3-3x^2+6x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$

Or, $(x^2+1)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$3x^2 - 3 \geq 0 \iff$

$\iff x^2 \geq 1 \iff x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

D'où les variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

$f(-1) = \dfrac{3}{2}$

$f(1) = \dfrac{-3}{2}$

En $x = -1$ et $x = 1$, f' s'annule et change de signe. f admet donc en ces deux abscisses des extremums locaux.

Plus précisément, $\frac{3}{2}$ est un maximum local de f atteint en $x = -1$ et $-\frac{3}{2}$ est un minimum local de f atteint en $x = 1$

(4)

5) $A(-2;-1)$ $B(0;4)$ $M(x;0)$

A, B, M alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires

(2) $\vec{AB}(2;5)$ $\vec{AM}(x+2;1)$

alors : $x_{\vec{AB}} \times y_{\vec{AM}} = y_{\vec{AB}} \times x_{\vec{AM}}$

$\iff 2 \times 1 = 5 \times (x+2)$

$\iff 2 = 5x + 10$

$\iff 5x = -8$

$\iff \boxed{x = -\frac{8}{5}}$

6) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi;\pi[$

On a : $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\pi}{4} \in [-\pi;\pi[$

et

(1) $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$

avec $\frac{3\pi}{4} \in [-\pi;\pi[$

$[-\pi;\pi[$ est un intervalle de longueur 2π

Il n'y a pas d'autre solution :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$$

7) $A(2;3)$ $B(-1;1)$ $(d) : (AB)$

$\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$(-1-2 ; 1-3)$

$(-3 ; -2)$

Soit $M(x;y) \in (AB)$:

alors $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

$\vec{AM}(x-2;y-3)$

(2) $x_{\vec{AM}} \times y_{\vec{AB}} = y_{\vec{AM}} \times x_{\vec{AB}}$

$\iff (x-2)\times(-2) = (y-3)\times(-3)$

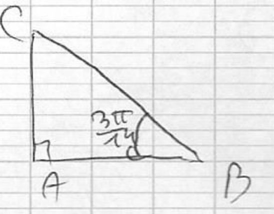
$\iff \underline{-2x + 3y - 5 = 0}$ (Équation cartésienne de (d))

8) $\sin(x+\pi)+\sin(-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x - \sin x - \sin x$

$= \boxed{-3\sin x}$

1

$\left(\begin{array}{l} \text{car : } \sin(x+\pi) = -\sin x \\ \quad \sin(-x) = -\sin x \\ \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \end{array}\right)$

9) 

$\oplus$ $\quad (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) = \frac{3\pi}{14}$

$(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA})\ [2\pi]$ (relation de Chasles)

$= (-\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + (-\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

$= (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}) + \pi + (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

(car $(-\vec{u};\vec{v}) = (\vec{u};\vec{v}) + \pi\ [2\pi]$)

2

$= \frac{3\pi}{14} + \pi + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$= \frac{3\pi + 14\pi + 7\pi}{14}\ [2\pi]$

$= \frac{24\pi}{14}\ [2\pi]$

$= \frac{12\pi}{7}\ [2\pi]$

Or, $\frac{12\pi}{7} \notin]-\pi;\pi]$

$\frac{12\pi}{7} - 2\pi = \frac{12\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = -\frac{2\pi}{7}$

Donc $-\frac{2\pi}{7}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA})$.

$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

(relation de Chasles)

$= (-\overrightarrow{AB};-\overrightarrow{AC}) + \frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$ (d'après 1)

$= (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) + \frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{7}\ [2\pi]$

$= \frac{7\pi + 4\pi}{14}\ [2\pi]$

$= \frac{11\pi}{14}\ [2\pi]$.

Or, $\frac{11\pi}{14} \in]-\pi;\pi]$

Donc $\frac{11\pi}{14}$ est la mesure principale de $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CB})$.

10) $S = 2 + 10 + 50 + 250 + \dots + 31\,250$

$= 2(\underbrace{1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 15\,625}_{\text{Somme des 7 premiers termes de la suite géom. de raison 5 et de 1er terme } u_0 = 1})$

$= 2\times(1 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^6)$

2

$= 2\times\frac{1-5^7}{1-5} = 2\times\frac{1-5^7}{-4} = -\frac{1}{2}(1-5^7)$

$= \frac{5^7-1}{2}$

$S = \boxed{39\,062}$

11) $E(-2;-1)$ $F(3;-5)$

Soit Ω le milieu de $[EF]$:

$\Omega\left(\frac{x_E+x_F}{2};\frac{y_E+y_F}{2}\right)$

$\left(\frac{1}{2};-3\right)$

D'où une équation cartésienne du cercle est donnée par :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2=R^2$$

où $R=\dfrac{EF}{2}$ c'est-à-dire $R^2=\dfrac{EF^2}{4}$

Or, $EF^2=(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2$

$$=(3+2)^2+(-5+1)^2$$

$$=25+16$$

2

$$=41$$

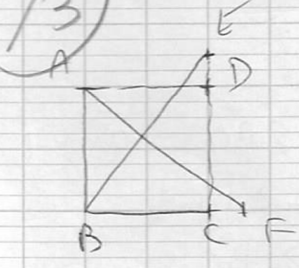
D'où :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+3)^2=\frac{41}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x+6y+\frac{1}{4}+9-\frac{41}{4}=0$$

$\Leftrightarrow \underline{x^2+y^2-x+6y-1=0}$ Équation cartésienne développée du cercle de diamètre $[EF]$

Exercice 2 : /3



ABCD carré de côté 1

$\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Dans le repère $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$:

B a pour coordonnées $(0;0)$ (origine du repère)

C — — — $(1;0)$

A — — — $(0;1)$

F — — — $\left(\frac{3}{2};0\right)$ car $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+0\overrightarrow{BA}$

8

et E a pour coordonnées $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$

$\left(\text{Car } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\right)$

$(\text{car } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA})$

2,5

d'où : $\overrightarrow{AF}\left(\frac{3}{2} ; -1\right)$ $\quad \overrightarrow{BE}\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$

donc : $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2} \times 1 + (-1) \times \frac{3}{2} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux.

0,5

Donc :

$$(AF) \perp (BE)$$

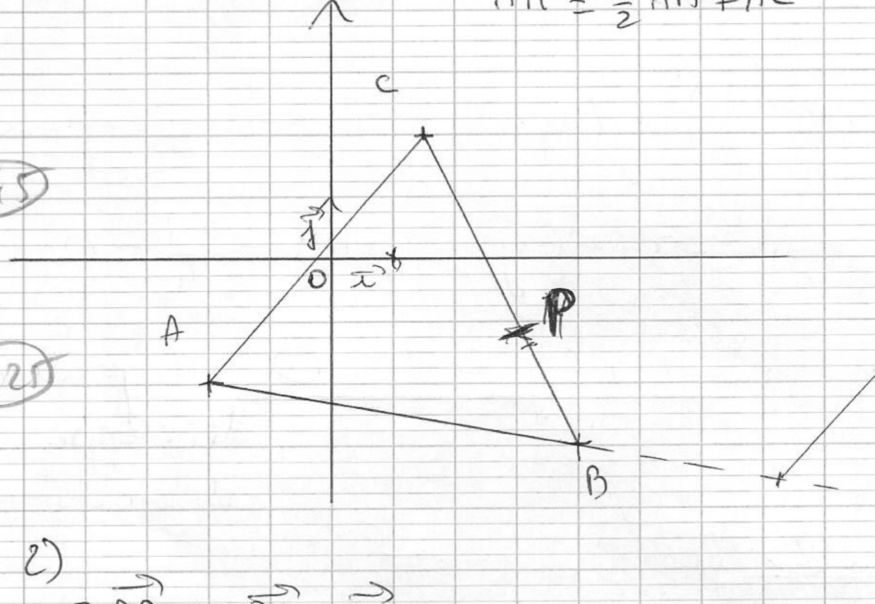
Exercice 3 : /5

$A(-2 ; -2)$ $\quad B(4 ; -3)$ $\quad C\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$

$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

0,5

0,25



2)

$3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

a) $3\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ (relation de Chasles)

1

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

0,25

c) Il semblerait que les points A, N et P soient alignés

3) Comme $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$,

$x_{\overrightarrow{AN}} = \frac{3}{2} x_{\overrightarrow{AB}} + x_{\overrightarrow{AC}}$ et $y_{\overrightarrow{AN}} = \frac{3}{2} y_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{AC}}$

C'est-à-dire :

$$x_N - x_A = \frac{3}{2} \times 6 + \frac{7}{2} = \frac{25}{2}$$

d'où $x_N = \frac{25}{2} - 2 = \frac{25}{2} - \frac{4}{2} = \frac{21}{2}$

2

De même : $y_N - y_A = \frac{3}{2} \times (-1) + 4$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$y_N = \frac{5}{2} + y_A = \frac{5}{2} + (-2) = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{N\left(\frac{21}{2} ; \frac{1}{2}\right)}$

4) $\overrightarrow{AN}\left(x_N - x_A ; y_N - y_A\right)$

$\left(\frac{21}{2} + 2 ; \frac{1}{2} + 2\right)$

$\left(\frac{25}{2} ; \frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{BP}\left(\frac{2}{5} \times (x_C - x_B) ; \frac{2}{5}(y_C - y_B)\right)$

$\left(\frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{2}\right) ; \frac{2}{5} \times 5\right)$

$(-1 ; 2)$

$(x_P - x_B ; y_P - y_B)$

$(x_P - 4 ; y_P + 3)$

d'où $\begin{cases} x_P - 4 = -1 \\ y_P + 3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = 3 \\ y_P = -1 \end{cases}$ $\boxed{P(3 ; -1)}$

1

$\overrightarrow{AP}\left(3 + 2 ; 1\right)$

$(5 ; 1)$

On a : $\frac{5}{2} \overrightarrow{AP} = \left(\frac{25}{2} ; \frac{5}{2}\right)$ d'où $\frac{5}{2} \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AN}$

D'où $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires avec un point en commun

Donc A, M et P sont alignés

Exercice 4 : 7

1) En septembre 2014 : 150 élèves
En septembre 2015 :
$0,8 \times 150 + 40 = 160$ élèves

1

2) Chaque année, 80 % des élèves se réinscrivent et 40 s'inscrivent pour la 1ère fois.
D'où $u_{n+1} = 0,8 u_n + 40$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1

3) a)

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de U	150	160	168	174,4	179,52	183,62	≃186,89	≃189,51	≃191,61
condition $U \leq 190$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Fausse

1

b) En sortie, l'algorithme affiche 2022
$(= 2014 + 8)$
Au bout de 8 ans, la capacité d'accueil maximale sera atteinte

0,5

4) $v_n = u_n - 200$
a)
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,8 u_n + 40 - 200$$
$$= 0,8 u_n - 160$$
$$= 0,8(u_n - 200) \quad (\text{car } 200 \times 0,8 = 160)$$
$$= 0,8 v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

2

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de 1er terme $v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = -50$

b) Comme (v_n) est géométrique,

0,5 $\underline{v_n} = v_0 \times q^n = \underline{-50 \times 0{,}8^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Or, $u_n = v_n + 200$

0,5 d'où $\underline{u_n = 200 - 50 \times 0{,}8^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

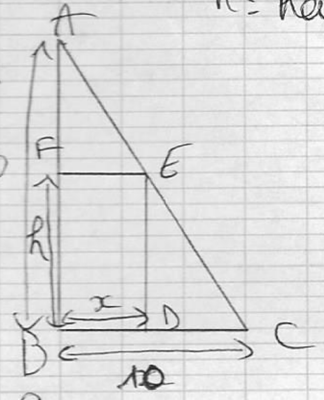
0,5 c) $u_8 = 200 - 50 \times 0{,}8^8 \simeq 191{,}6 \simeq 192 > 190$

Elle refusera des inscriptions à partir de 2022

Exercice 5 : /5

1) $V(x) = \pi r^2 h$, où r : rayon du disque de base
h : hauteur du cylindre

Plan de coupe vertical :



On a $V(x) = \pi x^2 h$

Dans le triangle ABC, $(FE) // (BC)$ et $F \in [AB]$, $E \in$

2 On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{FE}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30-h}{30} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 30x = 10(30-h)$$

$$\Leftrightarrow 30x - 10 \times 30 = -10h$$

$$\Leftrightarrow 10 \times 3 - 3x = h$$

d'où $\underline{V(x)} = \pi x^2 \times (30 - 3x)$

$= 30\pi x^2 - 3\pi x^3 = \underline{30\pi x^2 \left(1 - \frac{1}{10} x\right)}$ pour $0 \leq x$

12

$$V(x) = 30\pi x^2\left(1-\frac{x}{10}\right)$$
$$= 30\pi x^2 - 3\pi x^3$$

V est dérivable sur $[0;10]$ car c'est une fonction polynôme

$$V'(x) = 2\times 30\pi x - 3\times 3\pi x^2$$
$$= 60\pi x - 9\pi x^2 = -9\pi x^2 + 60\pi x$$
$$\cancel{= 3\pi x(20-3x)}$$
$$= 3\pi x(20-3x)$$

Étude du signe de V' :

$20 - 3x \geq 0 \iff 3x \leq 20$

$\iff x \leq \frac{20}{3}$

(3)

x	0		$\frac{20}{3}$		10
signe de $3\pi x$	0	$+$		$+$	
signe de $20-3x$		$+$	0	$-$	
signe de $V'(x)$	0	$+$	0	$-$	

V' s'annule et change de signe en $x = \frac{20}{3}$.

En $x = \frac{20}{3}$, V admet donc un extremum local.

Ici, c'est un maximum.

(car V est croissante pour $x \leq \frac{20}{3}$ et décroissante après).

Donc :

<u>Le volume est maximal pour $x = \frac{20}{3} \simeq 6,7$ cm</u>