Première S4 Corrigé DS de mathématiques

(Fait le 30/11/16).

①

Exercice ①: /5

1) $(d): 2x-y+3=0$ $\quad (d'): 3x+2y-4=0$

$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a'=3 \\ b'=2 \\ c'=-4 \end{cases}$

$\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (d) $\quad \vec{u}'(-b';a')$ est un vecteur directeur de (d')

$\vec{u}(1;2)$ $\quad \vec{u}'(-2;3)$

$x_{\vec{u}} \times y_{\vec{u}'} = 1\times 3 = 3$ et $y_{\vec{u}} \times x_{\vec{u}'} = 2\times(-2) = -4$

$x_{\vec{u}} \times y_{\vec{u}'} \neq y_{\vec{u}} \times x_{\vec{u}'}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires

②

Donc: $(d) \not\parallel (d')$

2) D'après la question 1), on sait de (d) et (d') ont un point d'intersection. Nommons I, ce point $I(x;y)$ - $(x;y)$ solution du système :

$$\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ 3x+2(2x+3)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ 7x+6=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+3 \\ x=-\frac{2}{7} \end{cases}$$

1,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2\times\left(-\frac{2}{7}\right)+3=-\frac{4}{7}+\frac{21}{7}=\frac{17}{7} \\ x=-\frac{2}{7} \end{cases}$$

Donc $I\left(-\frac{2}{7};\frac{17}{7}\right)$.

3) $(d'')\parallel(d)$ d'où une équation cartésienne de (d'') est donnée par :

$$2x-y+c=0$$

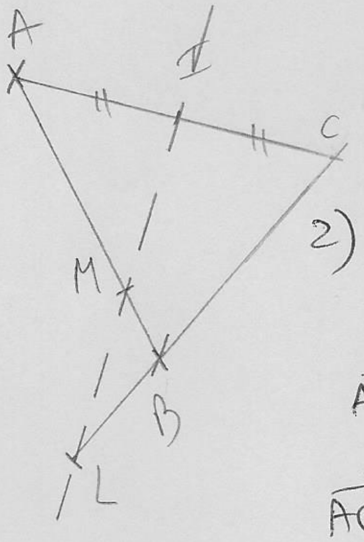
Or, $A(3;1)\in(d'') \Leftrightarrow 2\times 3-1+c=0 \Leftrightarrow c=-5$

Donc : (d'') a pour équation : $2x-y-5=0$

1,5

Exercice 2 : /6

1)



$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

On se place dans le repère : $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2) A est l'origine du repère, d'où : $A(0;0)$ 0,5

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ d'où $B(1;0)$ 0,5

$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ d'où $C(0;1)$ 0,5

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ car I milieu de [AC]

On a : $\overrightarrow{AI} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ 0,5

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$, d'où $M\left(\frac{3}{4};0\right)$ 0,5

3) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL}$ (Relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles) 1

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où $L\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

4) $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} x_L - x_I \\ y_L - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

on a : $\frac{1}{2}\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IM}$

(en effet : $\frac{1}{2}x_{\overrightarrow{IL}} = x_{\overrightarrow{IM}}$ et $\frac{1}{2}y_{\overrightarrow{IL}} = y_{\overrightarrow{IM}}$) 1

D'où $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires avec un point commun

Donc : I, M et L sont alignés.

Exercice 3 : /7

1) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 3}$

f est définie si et seulement si $4x^2 - 7x + 3 \geq 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 4 \times 3 = 49 - 48 = 1 > 0$

D'où le binôme admet deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+1}{8} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-1}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3\times 2}{4\times 2} = \dfrac{3}{4}$ 3

Le binôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

or, $a = 4 > 0$ 1

D'où $4x^2 - 7x + 3 \geq 0$, pour $x \in]-\infty; \frac{3}{4}] \cup [1; +\infty[$.

Donc : $\underline{D_f =]-\infty; \frac{3}{4}] \cup [1; +\infty[}$

b) $g(x) = 4x^2 - 7x + 3$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -7 \\ c = 3 \end{cases}$

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{7}{8}$ et $\beta = g(\alpha) = g\left(\frac{7}{8}\right) = 4\times\left(\frac{7}{8}\right)^2 - 7\times\frac{7}{8} + 3$

$= 4\times\dfrac{49}{64} - \dfrac{49}{8} + 3$

$= \dfrac{49}{16} - \dfrac{98}{16} + \dfrac{48}{16} = -\dfrac{1}{16}$ 1

$a = 4 > 0$, d'où g est d'abord décroissante, puis croissante.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$
Variation de g	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$

c) On se place sur $[1; +\infty[$:

Soient $a, b \in [1; +\infty[$, avec $a < b$

On a : $1 > \frac{7}{8}$, d'où sur $[1; +\infty[$, g est strictement croissante (d'après les variations obtenues en b)).

d'où $g(a) < g(b)$ 1

Or, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$,

d'où $\sqrt{g(a)} < \sqrt{g(b)}$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$

Donc $\underline{f \text{ est strictement croissante sur } [1; +\infty[}$

d) On a $f(1) = \sqrt{g(1)} = \sqrt{0} = 0$ et f strictement croissante sur $[1; +\infty[$

D'où le tableau de variations de f sur $[1; +\infty[$:

x	1	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	

(0,5)

2) $h(x) = |-2x+5|$

a) $-2x+5 \geq 0 \iff -2x \geq -5 \iff x \leq \frac{5}{2}$

D'où : $h(x) = \begin{cases} -2x+5, \text{ si } x \leq \frac{5}{2} \\ 2x-5, \text{ si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$ (1)

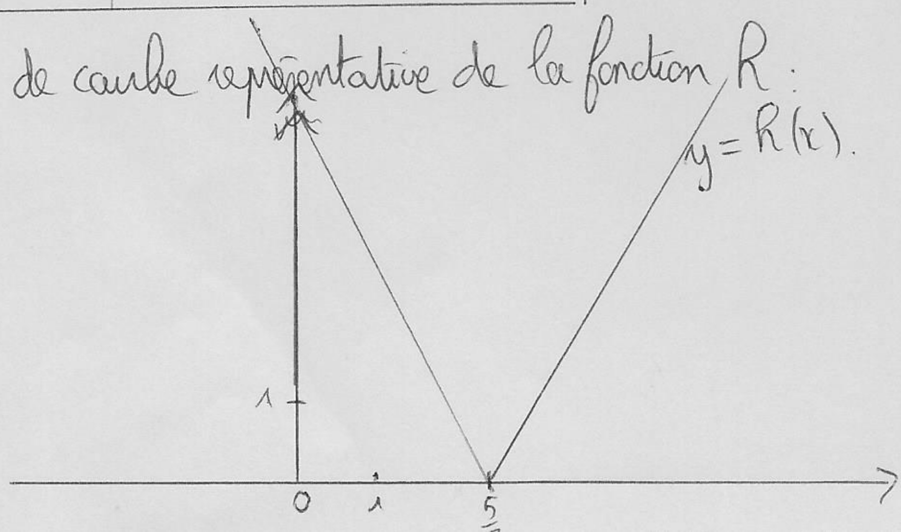
b) Soit $x \longmapsto -2x+5$: c'est une fonction affine car de la forme $ax+b$, avec $a = -2 < 0$
d'où : c'est une fonction affine décroissante
Soit $x \longmapsto 2x-5$: c'est une fonction affine car de la forme $ax+b$
avec $a = 2 > 0$
c'est donc une fonction affine croissante

D'où : h est décroissante sur $]-\infty ; \frac{5}{2}]$
et croissante sur $[\frac{5}{2} ; +\infty[$. (1)

D'où le tableau de variations de h : $h(\frac{5}{2}) = 0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Variations de h	↘	0	↗

c) Allure de courbe représentative de la fonction h :



(0,5)

d) $R(x) = 2 \iff |-2x+5| = 2$

① $-2x+5 = 2$
$\iff -2x = -3$
$\iff x = \frac{3}{2}$

② $-2x+5 = -2$
$\iff -2x = -7$
$\iff x = \frac{7}{2}$

Interprétation graphique.

La droite d'équation $y = 2$ coupe la courbe représentative de R en deux points d'abscisses respectives $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{2}$

Exercice 4 /7

1) $u_n = 5n - n^2$ (Suite définie explicitement en fonction de n)

1,5 (3×0,5)

a) $u_0 = 5\times 0 - 0^2 = \boxed{0}$ $u_1 = 5\times 1 - 1^2 = 5-1 = \boxed{4}$ $u_2 = 5\times 2 - 2^2 = 10-4 = \boxed{6}$

b) $u_{n+1} = 5(n+1) - (n+1)^2$

1,5

$= 5n+5 - (n^2+2n+1)$

$= -n^2+3n+4$

c) $u_{n+1} - u_n = -n^2+3n+4-(5n-n^2)$

1,5

$= \cancel{-n^2}+3n+4-5n+\cancel{n^2}$

$= -2n+4$

2) $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2 \end{cases}$ (Suite définie par récurrence)

a) $v_1 = \frac{1}{2}v_0 + 2 = \frac{5}{2}+2 = \frac{5}{2}+\frac{4}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$ 0,5

$v_2 = \frac{1}{2}v_1 + 2 = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2}+2 = \frac{9}{4}+\frac{8}{4} = \boxed{\frac{17}{4}}$ 0,5

$v_3 = \frac{1}{2}v_2 + 2 = \frac{1}{2}\times\frac{17}{4}+2 = \frac{17}{8}+\frac{16}{8} = \boxed{\frac{33}{8}}$ 0,5

b) $v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}v_n + 2\right] + 2 = \frac{1}{4}v_n + 1 + 2$

1

$= \frac{1}{4}v_n + 3$