

Première S4

Correction du contrôle
sur les suites arithmétiques
et géométriques

(1)
(Fait le 02/05/17)

Exercice (1): (u_n) suite arithmétique - $u_5 = 21$, $u_{15} = -5$
1)

$$u_{15} = u_5 + (15-5) \times r \quad (\text{car c'est une suite arithmétique})$$

$$\Leftrightarrow -5 = 21 + 10r \quad \Leftrightarrow -5 - 21 = 10r$$

$$\Leftrightarrow -26 = 10r$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{26}{10} = -\frac{13}{5} \quad \boxed{-\frac{13}{5}}$$

$$2) u_{50} = u_{15} + (50-15) \times \left(-\frac{13}{5}\right)$$

$$= -5 + 35 \times \left(-\frac{13}{5}\right)$$

$$= -5 - 7 \times 13$$

$$= \boxed{-96}$$

$$3) S = u_5 + u_6 + \dots + u_{15} = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$

$$= (15-5+1) \times \frac{u_5 + u_{15}}{2}$$

$$= 11 \times \frac{21-5}{2} = 11 \times \frac{16}{2} = \boxed{88}$$

Exercice (2):

$$1) u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{16} + \frac{8}{16}$$

$$= \frac{5}{16}$$

$$u_1 - u_0 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} = \frac{12}{16} \quad u_2 - u_1 = \frac{5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16} + \frac{4}{16} = \frac{9}{16}$$

(2)

Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, alors (u_n) n'est pas arithmétique.

De plus: $\frac{u_1}{u_0} = \frac{-\frac{1}{4}}{-1} = \frac{1}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{5}{16}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{5}{4}$

d'où $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\ &= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{4}\left(u_n - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc: (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$
de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3$

b) Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$
Donc $v_n = -3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Comme $v_n = u_n - 2$, alors $u_n = v_n + 2$
Donc:

$$u_n = 2 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3) $-1 < \frac{3}{4} < 1$ d'où $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$