CORRIGE

NOM :…………………………………………Prénom :………………………………………

Fait le

Première S4	**Devoir de mathématiques :** *Second degré*	Vendredi 07 octobre 2016

- Calculatrice autorisée
- Durée : 45 min
- Répondre directement sur le sujet

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : (4 pts)

Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère la famille d'équations (E_m) : $(2m + 1)x^2 - (m + 3)x + 1 = 0$

1) A quelle condition sur m, (E_m) est-elle une équation du second degré ? Justifier .

(E_m) équation du second degré $\iff 2m+1 \neq 0$

$\iff \boxed{m = -\frac{1}{2}}$ 1

2) On suppose que $m \neq -\frac{1}{2}$:

a) Résoudre l'inéquation $x^2 - 2x + 5 > 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

D'où le trinôme n'a pas de racine réelle

Il est toujours du signe de a.

Or, $a = 1 > 0$

Donc $x^2 - 2x + 5 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$ 1,5

b) En déduire que pour tout $m \neq -\frac{1}{2}$, (E_m) admet toujours deux solutions distinctes

Comme $m \neq -\frac{1}{2}$, (E_m) est une équation du second degré (d'après 1)) 1,5

$\begin{cases} a = 2m+1 \\ b = -(m+3) \\ c = 1 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac = (m+3)^2 - 4 \times (2m+1) \times 1 = m^2 + 6m + 9 - 8m - 4$

$= m^2 - 2m + 5$

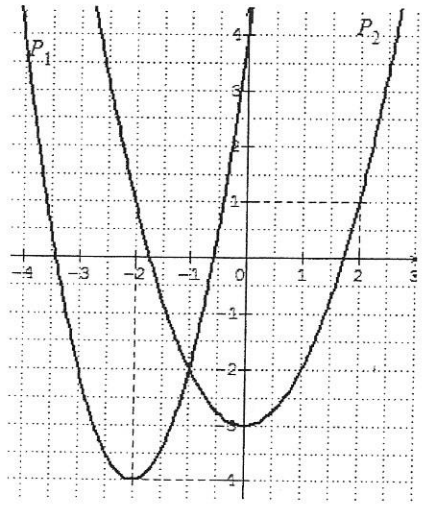
Or, d'après 2a), $m^2 - 2m + 5 > 0$, pour tout $m \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

Comme $\Delta > 0$, pour tout $m \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$: (E_m) admet toujours 2 solutions distinctes.

NOM :………………………………………………Prénom :……………………………………………

Exercice 2 : (6 pts)

Sur ℝ, on définit deux fonctions f et g par : $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ et $g(x) = x^2 - 3$



1) Attribuer à chaque fonction sa courbe en justifiant :

2

On a $f(0) = 2\times 0^2 + 8\times 0 + 4 = 4$ d'où la parabole représentant f passe par le point de coordonnées $(0;4)$.

Donc (P_1) représente f (et donc (P_2) représente g)

2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de ces deux paraboles :

2

Il faut résoudre $f(x) = g(x) \iff 2x^2+8x+4 = x^2-3 \iff x^2+8x+7=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4\times 1\times 7 = 64 - 28 = 36 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+6}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-6}{2} = -7$. D'où les points $(-1;(-1)^2-3) = (-1;-2)$ et $(-7;(-7)^2-3) = (-7;46)$ sont les 2 points d'intersection de (P_1) et (P_2)

3) Quel est l'ensemble des nombres x tels pour lesquels (P_1) est située en dessous de (P_2) ?

On doit résoudre l'inéquation. $f(x) \leq g(x)$

$\iff x^2+8x+7 \leq 0$

2

D'après 2), le trinôme admet 2 racines distinctes $x_1 = -1$ et $x_2 = -7$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

D'où $x^2+8x+7 \leq 0$, pour $x \in [-7;-1]$. Donc (P_1) est située en dessous de (P_2) sur $[-7;-1]$

Exercice 3 : (5 pts)

Déterminer deux nombres dont le produit vaut $-\frac{2}{9}$ et la somme $\frac{7}{6}$. Détailler les calculs.

$P = -\frac{2}{9}$ $S = \frac{7}{6}$ On pose (E) : $x^2 - Sx + P = 0$

d'où $x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{2}{9} = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{7}{6} \\ c = -\frac{2}{9} \end{cases}$ 2

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{7}{6}\right)^2 - 4\times 1\times\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{49}{36} + \frac{8}{9} = \frac{49+32}{36} = \frac{81}{36} > 0$ 2

d'où l'équation admet 2 solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{6}+\frac{9}{6}}{2} = \frac{\frac{16}{6}}{2} = \frac{16}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{7}{6}-\frac{9}{6}}{2} = \frac{-\frac{2}{6}}{2} = -\frac{1}{6}$ 1

$\boxed{S = \left\{\frac{4}{3}; -\frac{1}{6}\right\}}$

Vérification :

$\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

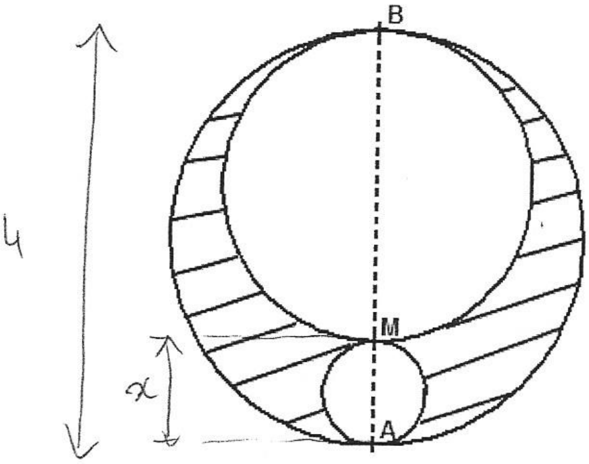
$\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}$

NOM :……………………………………………………Prénom :…………………………………………

Exercice 4 : (5 pts)

Le p'tit Robert , très fier, souhaite faire un pendentif ayant des formes circulaires pour la fête des mères (ça ne manque pas d' « r »...)

Le pendentif est constitué de trois disques comme l'indique le schéma suivant :



M est situé sur le segment [AB]

AB = 4 cm et on note : AM = x

1) Montrer que l'aire de la partie hachurée en cm² est donnée par : $f(x) = \frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)$

$f(x) = \text{Aire(disque de diamètre [AB])} - (\text{Aire(Disque de diamètre [MB])} + \text{Aire(Disque de diamètre [MA])})$

2

$= \pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 + \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)$

$= 4\pi - \left(\frac{\pi}{4}(16 - 8x + x^2) + \frac{\pi}{4}x^2\right) = \cancel{4\pi - 4\pi} + \frac{4x\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}x^2$

$= -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{2} \times 4x = \boxed{\frac{\pi}{2}(-x^2 + 4x)}$

2) Déterminer la position du point M sur le segment [AB] pour que l'aire de la partie hachurée soit maximale.

On a $f(x) = -\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x$ $\begin{cases} a = -\frac{\pi}{2} \\ b = 2\pi \\ c = 0 \end{cases}$

3

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\pi}{2 \times (-\frac{\pi}{2})} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ et $\beta = f(\alpha) = f(2) = -\frac{\pi}{2} \times 4 + 2\pi \times 2 = 2\pi$

β est le maximum de f et il est atteint en $x = \alpha = 2$

On note A_{max} cette aire. En plaçant M à 2 cm de A, l'aire de la partie hachurée est maximale.

$A_{max} = 2\pi$

3) **BONUS :** Où Bob (pour les intimes...) doit-il placer le point M pour vérifier les contraintes suivantes ?

$$\frac{1}{2}A_{max} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}A_{max}$$

1ère inégalité :

$f(x) \geq \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi \iff -\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x \geq \pi \iff -\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x - \pi \geq 0$ $\begin{cases} a = -\frac{\pi}{2} \\ b = 2\pi \\ c = -\pi \end{cases}$ +2

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\pi)^2 - 4 \times (-\frac{\pi}{2}) \times (-\pi) = 4\pi^2 - 2\pi^2 = 2\pi^2 > 0$

Le binôme a 2 racines distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\pi + \pi\sqrt{2}}{-\pi} = \frac{-2 + \sqrt{2}}{-1} = 2 - \sqrt{2}$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\pi-\pi\sqrt{2}}{-\pi} = \frac{2+\sqrt{2}}{1} = 2+\sqrt{2}.$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = -\frac{\pi}{2} < 0$ d'où $-\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x - \pi \geq 0$ pour $\underline{x \in [2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}]}$

2ième inégalité :

$$f(x) \leq \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x \leq \frac{3\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x - \frac{3\pi}{2} \leq 0$$

$$\begin{cases} a = -\frac{\pi}{2} \\ b = 2\pi \\ c = -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\pi)^2 - 4 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= 4\pi^2 - 3\pi^2 = \pi^2 > 0$$

Le trinôme a 2 racines distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\pi+\pi}{2\times(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\pi-\pi}{2\times(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-3\pi}{-\pi} = 3$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = -\frac{\pi}{2} < 0$ d'où $-\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x - \frac{3\pi}{2} \leq 0$ pour $x \in [0 ; 1] \cup [3 ; 4]$

(attention aux contraintes de l'énoncé $0 \leq x \leq 4$).

$2-\sqrt{2} > 0$ et $2+\sqrt{2} \in [3 ; 4]$.

Par conséquent : $\frac{1}{2} A_{max} \leq f(x) \leq \frac{3}{4} A_{max}$ pour :

$$\underline{x \in [2-\sqrt{2} ; 1] \cup [3 ; 2+\sqrt{2}]}$$