

Exercice 48

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{6u_n + 4}{u_n + 9} \end{cases}$$

On pose: $v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$

$$\begin{aligned} 1) v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} + 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{6u_n + 4}{u_n + 9} + 4}{\frac{6u_n + 4}{u_n + 9} - 1} = \frac{\frac{6u_n + 4 + 4(u_n + 9)}{u_n + 9}}{\frac{6u_n + 4 - (u_n + 9)}{u_n + 9}} \\ &= \frac{10u_n + 40}{5u_n - 5} = \frac{10(u_n + 4)}{5(u_n - 1)} \\ &= 2 \times \frac{u_n + 4}{u_n - 1} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = 2v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique, de raison 2 et de 1^{er} terme $v_0 = \frac{u_0 + 4}{u_0 - 1}$

$$= \frac{5 + 4}{5 - 1} = \frac{9}{4}$$

2) Comme (v_n) est géométrique,
 $v_n = v_0 \times 2^n = \frac{9}{4} \times 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Or, } v_n &= \frac{u_n + 4}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n + 4 \Leftrightarrow u_n \times v_n - v_n = u_n + 4 \\ &\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = 4 + v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1} \end{aligned}$$

d'où, $u_n = \frac{\frac{9}{4} \times 2^n + 4}{\frac{9}{4} \times 2^n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 4) u_{n+1} - u_n &= \frac{\frac{9}{4} \times 2^{n+1} + 4}{\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1} - \frac{\frac{9}{4} \times 2^n + 4}{\frac{9}{4} \times 2^n - 1} \\ &= \frac{(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} + 4)(\frac{9}{4} \times 2^n - 1) - (\frac{9}{4} \times 2^n + 4)(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1)}{(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1)(\frac{9}{4} \times 2^n - 1)} \\ &= \frac{\cancel{(\frac{9}{4})^2 \times 2^{2n+1}} - \frac{9}{4} \times 2^{n+1} + 9 \times 2^n - 4 - \cancel{(\frac{9}{4})^2 \times 2^{2n+1}} + \frac{9}{4} \times 2^n - 9 \times 2^{n+1} + 4}{(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1)(\frac{9}{4} \times 2^n - 1)} \\ &= \frac{-\frac{9}{4} \times 2^n (2 - 1) + 9 \times 2^n (1 - 2)}{(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1)(\frac{9}{4} \times 2^n - 1)} = \frac{-\frac{9}{4} \times 2^n - 9 \times 2^n}{(\frac{9}{4} \times 2^{n+1} - 1)(\frac{9}{4} \times 2^n - 1)} < 0 \end{aligned}$$

2) D'où $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire (u_n) décroissante

Exercice (49):

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

1) Avec la calculatrice:

conjecture: (u_n) semble croissante et sa limite semble être 3

2) $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - \frac{3(6 - u_n)}{6 - u_n}} \\ &= \frac{1}{\frac{-9 + 3u_n}{6 - u_n}} \\ &= \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} \\ &= \frac{-(u_n - 6)}{3(u_n - 3)} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{u_n - 3 - 3}{u_n - 3} \\ &= -\frac{1}{3} \left[1 - \frac{3}{u_n - 3} \right] \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{u_n - 3} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = -\frac{1}{3} + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de 1^{re} terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$

4) Comme (v_n) arithmétique :

$$v_n = v_0 + nr$$

$$= -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Or, } v_n = \frac{1}{u_n - 3} \Leftrightarrow u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 3$$

$$\text{donc } u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{n}{3}} + 3$$

$$= \frac{1}{-\frac{3+2n}{6}} + 3 = \frac{-6}{3+2n} + \frac{9+6n}{3+2n}$$

$$u_n = \frac{6n+3}{2n+3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$5) u_{n+1} - u_n = \frac{6(n+1)+3}{2n+2+3} - \frac{6n+3}{2n+3}$$

$$= \frac{6n+9}{2n+5} - \frac{6n+3}{2n+3}$$

$$= \frac{(2n+3)(6n+9) - (6n+3)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{12n^2} + \cancel{18n} + \cancel{18n} + 27 - \cancel{12n^2} - \cancel{30n} - \cancel{6n} - 15}{(2n+5)(2n+3)}$$

$$= \frac{12}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc (u_n) est strictement croissante