

Exercice (1):

1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

(En effet: 1 est bien valeur interdite.
d'où $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$) f est dérivable sur tout intervalle ouvert contenu dans D_f .

On pose $u(x) = x^2 - 3x + 6$

$u'(x) = 2x - 3$

$v(x) = x - 1$

$v'(x) = 1$

On a: $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

$$= \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+6)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x - 6}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$(x-1)^2 > 0$, pour tout $x \in D_f$

Étudions le signe de $x^2 - 2x - 3$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times (-3)$

$= 16 > 0$

Le trinôme admet donc 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = 1 > 0$, d'où $x^2 - 2x - 3 > 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

et $x^2 - 2x - 3 < 0$ pour $x \in]-1, 3[$

Voici le tableau de variations de f :

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3(-1) + 6}{-2}$$

$$f(3) = \frac{3^2 - 3 \times 3 + 6}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Signe de f'	+	0	-	-	0	+
Variation de f	↗ 5		↘	↘ 3	↗	

$$2) -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \quad (E)$$

(2)

On pose $X = \cos x$

$$\text{d'où } (E) \Leftrightarrow -2X^2 + X + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times 1$$

$$= 9 > 0$$

d'où l'équation admet deux solutions distinctes

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{-4} = 1$$

D'où on se relie avec deux équations:

$$(E_1): \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (E_2): \cos x = 1$$

- Par (E_1) :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où dans } \mathbb{R}: S_1 = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Par (E_2) : $\cos 0 = 1$ ~~$\cos \pi = -1$~~

$$\text{d'où dans } \mathbb{R}: S_2 = \{ 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

Par conséquent: les solutions de (E) sont données par:

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$= \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3) A(2, -3) \quad B(-1, 5) \quad C(-4, 7)$$

$$a) \overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A) \left. \begin{array}{l} \text{Soit } M(x; y) \in (AB) \\ \text{alors } \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \end{array} \right\}$$

$$(1-2; 5+3)$$

$$(-1; 8)$$

$$\text{on, } \overrightarrow{AM} (x-2; y+3)$$

$$\text{et } (\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires}) : -1 \times (y+3) = 8(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 8x + y - 16 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{8x + y - 13 = 0} \quad (\text{Equation cartésienne de } (AB))$$

b) Soit (Δ) : la médiatrice de $[BC]$

Notons I : le milieu de $[BC]$

$$I \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1 + (-4)}{2}, \frac{5 + 7}{2} \right)$$

$$\left(-\frac{3}{2}, 6 \right)$$

Soit $M(x; y) \in (\Delta)$:

$$\overrightarrow{IM} \left(x + \frac{3}{2}, y - 6 \right)$$

Comme $(\Delta) \perp (BC)$, alors $\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{BC}$

avec $\overrightarrow{BC} (-5; 2)$

$$\text{Or, } \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5\left(x + \frac{3}{2}\right) + 2(y - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x + 2y - \frac{15}{2} - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{-5x + 2y - \frac{39}{2} = 0} \quad (\text{Equation cartésienne de } (\Delta))$$

c) Soit $(\mathcal{C})$: cercle de diamètre $[AC]$

Notons J : le milieu de $[AC]$

$$J \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

$$\left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{-3 + 7}{2} \right)$$

$$(-1; 2)$$

J est également le centre de $(\mathcal{C})$

D'autre part : $R (= \text{rayon de } (\mathcal{C})) = \frac{AC}{2}$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (7 - (-3))^2}$$

$$= \sqrt{36 + 100} = \sqrt{136}$$

$$\text{d'où } R = \frac{\sqrt{136}}{2}$$

Equation cartésienne de $(\mathcal{C})$: $(x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 = R^2$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{136}{4}$$

$$\Leftrightarrow \underline{(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 34} \quad (\text{Equation cartésienne de } (\mathcal{C}))$$

4) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ (4)
 On a $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$
 et $(-\vec{v}, -\vec{u}) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ (car $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi]$)
 et $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$
 D'où $-\frac{\pi}{4}$ est la mesure principale de $(-\vec{v}, -\vec{u})$.

$$\begin{aligned} (-2\vec{u}, \vec{v}) &= (-\vec{u}, \vec{v}) [2\pi] \\ &= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{4} + \pi [2\pi] \\ &= \frac{5\pi}{4} [2\pi] \end{aligned}$$

Or, $\frac{5\pi}{4} \notin]-\pi; \pi]$
 et $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$
 D'où $-\frac{3\pi}{4}$ est la mesure principale de $(-2\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice (2)

$$\begin{cases} U_0 = 900 \\ U_{n+1} = 0,6U_n + 200 \end{cases}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1) $U_1 = 0,6 \times U_0 + 200 = 0,6 \times 900 + 200 = \boxed{740}$

$U_2 = 0,6 \times U_1 + 200 = 0,6 \times 740 + 200 = \boxed{644}$

2) $U_2 - U_1 = 644 - 740 = -96$ et $U_1 - U_0 = 740 - 900 = -160$

d'où $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ d'où (U_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{644}{740} = \frac{161}{185} \approx 0,87$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{740}{900} = \frac{37}{45} \approx 0,82$$

d'où $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ d'où (U_n) n'est pas géométrique

3) $V_n = U_n - 500$

a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 500 = 0,6U_n + 200 - 500$

$$= 0,6U_n - 300$$

$$= 0,6\left(U_n - \frac{300}{0,6}\right) = 0,6(U_n - 500)$$

$$= 0,6 \times V_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,6
 et de premier terme $V_0 = U_0 - 500 = 900 - 500 \neq 0$

Comme (V_n) est géométrique :

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \times q^n \\ &= 400 \times 0,6^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4) $V_n = U_n - 500$

$(\Rightarrow) U_n = V_n + 500$

$U_n = 400 \times 0,6^n + 500, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$

5)
$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 400 \times 0,6^{n+1} + 500 - 400 \times 0,6^n - 500 \\ &= 400 \times 0,6^n [0,6 - 1] \\ &= 400 \times 0,6^n \times (-0,4) \\ &= -160 \times 0,6^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Or, $0,6^n > 0$ et $-160 < 0$ d'où :

$U_{n+1} - U_n < 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$

Par conséquent : (U_n) est strictement décroissante.

6) a)

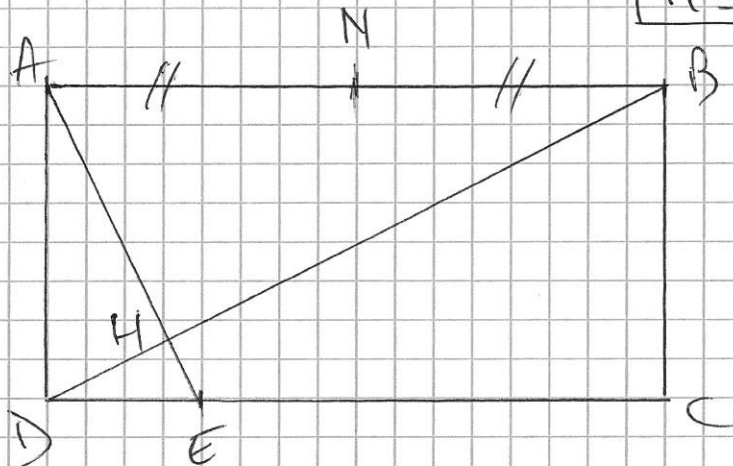
U	900	740	644	586,4	551,84	531,104
n	0	1	2	3	4	5
E	550	550	550	550	550	550

L'algorithme affichera 5

b) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 500$.

A la calculatrice : le plus petit N tel que $U_N < 500,01$ est $N = 21$

Exercice (3)



$$1) \left. \begin{array}{l} \vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} \\ \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} \end{array} \right\} \text{Relation de Chasles.}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \vec{AE} \cdot \vec{BD} &= (\vec{AD} + \vec{DE}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{AD} \cdot \vec{CD} + \vec{DE} \cdot \vec{BC} + \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\ &= \vec{AD}^2 + \underbrace{0}_{\substack{\text{car } \vec{AD} \perp \vec{CD} \\ \text{et } \vec{DE} \perp \vec{BC}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{car } \vec{DE} \perp \vec{BC} \\ \text{et } \vec{AD} \perp \vec{CD}}} + \underbrace{(-\vec{DE} \cdot \vec{CD})}_{\substack{\text{car } \vec{DE} \text{ et } \\ \vec{CD} \text{ de sens} \\ \text{opposés.}}} \\ &= \|\vec{AD}\|^2 - \vec{DE} \cdot \vec{CD} \\ &= 2^2 - 1 \times 4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AE} \text{ est un vecteur directeur de } (AE) \\ \vec{BD} \text{ est un vecteur directeur de } (BD) \end{array} \right\} \text{ donc: } \underline{(AE) \perp (BD)}$$

Or, $\vec{AE} \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow \vec{AE} \perp \vec{BD}$

$$\begin{aligned} 3) \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= \vec{BH} \cdot \vec{BD} \quad \text{car H est le projeté orthogonal de A} \\ &= \vec{BH} \times \vec{BD} \quad \left(\text{car } \vec{BH} \text{ et } \vec{BD} \text{ sont } \begin{array}{l} \text{sur } (BD) \\ \text{colinéaires et de même sens} \end{array} \right) \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{BA} + \vec{BD}\|^2 - \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{BD}\|^2 \right]$$

$$\text{Or, } \vec{BA} + \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BA} + \vec{AD} = 2\vec{BA} + \vec{AD} \quad (\text{relation de Chasles}).$$

$$\begin{aligned} \text{d'où: } \|\vec{BA} + \vec{BD}\|^2 &= \|2\vec{BA} + \vec{AD}\|^2 \\ &= 4\vec{BA}^2 + 4\vec{BA} \cdot \vec{AD} + \vec{AD}^2 \\ &= 4\|\vec{BA}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2 \quad \left(\text{car } \vec{BA} \perp \vec{AD} \right. \\ &\quad \left. \text{d'où } \vec{BA} \cdot \vec{AD} = 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4 \times 16 + 4 \\ &= 68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= \frac{1}{2} \left[68 - 16 - 20 \right] \\ &= \frac{1}{2} \times 32 = 16. \end{aligned}$$

(Th. de Pythagore dans $\triangle ABD$ rect en A.
 $BD^2 = AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow BD^2 = 16 + 4 = 20$)

Par conséquent.

(7)

$$BH \times \sqrt{20} = 16$$

$$\Rightarrow BH = \frac{16}{\sqrt{20}} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{8\sqrt{5}}{5}}$$

$$4) \quad \overrightarrow{HN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}), \quad HN = 2, \quad HA = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} a) \quad \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= \frac{1}{2} \{ \|\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{HA}\|^2 - \|\overrightarrow{HN}\|^2 - \|\overrightarrow{HA}\|^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HB} \right\|^2 - HN^2 - HA^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left\| \frac{3}{2} \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HB} \right\|^2 - 4 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{9}{4} \overrightarrow{HA}^2 + \frac{3}{2} \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}}_{=0 \text{ car } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{HB}} + \frac{1}{4} \|\overrightarrow{HB}\|^2 - 4 - \frac{16}{5} \right\} \\ &= \frac{9}{8} \times HA^2 + \frac{1}{8} \times HB^2 - \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\text{avec } HB = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= \frac{9}{8} \times \frac{16}{5} + \frac{1}{8} \times \frac{64}{5} - \frac{18}{5} \\ &= \frac{18}{5} - \frac{18}{5} + \frac{8}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} = \frac{8}{5}$$

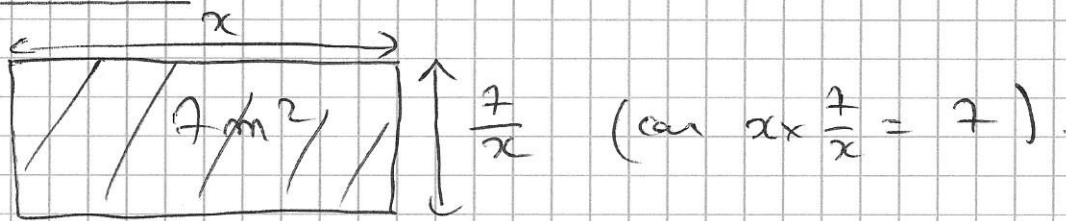
$$\begin{aligned} b) \quad \text{Or } \overrightarrow{HN} \cdot \overrightarrow{HA} &= \|\overrightarrow{HN}\| \times \|\overrightarrow{HA}\| \times \cos \widehat{AHN} \\ &= 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \cos \widehat{AHN} = \frac{8}{5} \quad (\text{question 4a}). \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \cos \widehat{AHN} = \frac{8}{5} \times \frac{5}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{d'où : } \widehat{AHN} = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \approx \boxed{63^\circ} \quad \text{avec la calculatrice}$$

Exercice n°4

(8)



On a: $P(x)$: périmètre d'un rectangle en fonction de x

$$P(x) = 2x \left(x + \frac{7}{x} \right) \\ = 2x^2 + \frac{14}{x}$$

P est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\text{et } P'(x) = 2 - \frac{14}{x^2} = \frac{2x^2 - 14}{x^2}$$

$$x^2 > 0 \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$2x^2 - 14 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 7$$

Étude des variations de P sur $]0; +\infty[$

x	0	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$		$\searrow P(\sqrt{7})$	$\nearrow$

En $x = \sqrt{7}$, P' s'annule et change de signe.

D'après les variations de P , en $x = \sqrt{7}$, P admet un minimum local

(il est absolu sur $]0; +\infty[$).

Si $x = \sqrt{7}$, le rectangle a pour

dimensions: $\sqrt{7}$ et $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$.

Le rectangle qui a un périmètre minimal est un carré de côté mesurant $\sqrt{7}$ cm.