

Exercice 1):

1) $A(-3; 5) \quad B(7; 2) \quad C(5; 6)$

$$\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$$
$$(10; -3)$$

Soit $M(x; y) \in (d)$:

Comme $(d) \parallel (AB)$, $\vec{CM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

Or, $\vec{CM} (x - 5; y - 6)$

d'où: $-3(x - 5) = 10(y - 6)$

$$\Leftrightarrow -3x - 10y + 15 + 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 10y + 75 = 0 \quad (\text{Equation cartésienne de } (d))$$

2) $S(2; 3)$: on a $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
avec $(\alpha; \beta)$ coordonnées de S

d'où: $f(x) = a(x - 2)^2 + 3$

Or, $f(1) = 0$ (par lecture graphique)

c'est-à-dire: $a(1 - 2)^2 + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow a = -3$$

Donc:

$$\underline{f(x) = -3(x - 2)^2 + 3}$$

3)
$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$v_n = u_n - \frac{1}{2}$$

$$\underline{v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}}$$

$$= 5u_n - 2 - \frac{1}{2}$$

$$= 5u_n - \frac{5}{2}$$

$$= 5\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = \underline{5v_n}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

$$4) f(x) = 5x^2 - 1$$

a) Soit $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \frac{5(h-2)^2 - 1 - (5 \times (-2)^2 - 1)}{h} \\ &= \frac{5(h^2 - 4h + 4) - 19 - 1}{h} \\ &= \frac{5h^2 - 20h + 20 - 20}{h} \\ &= \frac{h(5h - 20)}{h} = 5h - 20 \end{aligned}$$

Or, $5h - 20$ a une limite finie quand $h \rightarrow 0$
donc f est dérivable en -2

$$\text{et } f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (5h - 20) = \underline{-20}$$

$$\begin{aligned} b) (T_{-2}) : y &= f'(-2)(x+2) + f(-2) \\ &= -20(x+2) + 5 \times (-2)^2 - 1 \\ &= -20x - 40 + 20 - 1 \end{aligned}$$

Donc:

$$(T_{-2}) : y = -20x - 21$$

$$5) h(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2 + \frac{7}{2}x - 2}}$$

h est définie si et seulement si :

$$x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0$$

(en effet: il faut que $x \rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{7}{2}x - 2}$
soit définie et $\sqrt{x^2 + \frac{7}{2}x - 2} \neq 0$)

$$\text{On a: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-2)$$

$$= \frac{49}{4} + 8 = \frac{49 + 32}{4} = \frac{81}{4} > 0 \text{ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{7}{2} + \frac{9}{2}}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{7}{2} - \frac{9}{2}}{2} \\ &= \frac{-8}{2} = -4 \end{aligned}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

(3)

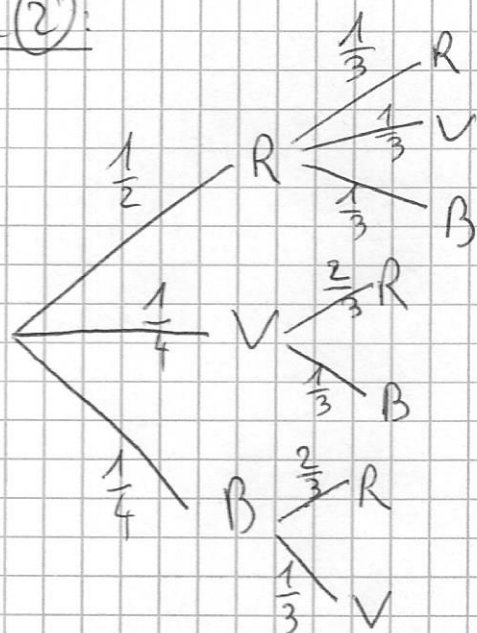
or, $a = 1 > 0$

D'où $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0$ pour $x \in]-\infty; -4[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

Donc : $D_R =]-\infty; -4[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

Exercice (2):

1)



2) a) X : gain obtenu à l'issue des 2 tirages

L'événement $(X = -2)$ correspond aux issues: $(R; V), (V; R)$

D'où $P(X = -2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b)

x_i	-2	-4	-1	1
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$P(X = -4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(X = -1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$P(X = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Calcul de $E(X)$:

$E(X) = -2 \times \frac{1}{3} - 4 \times \frac{1}{6} - 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

$$B(X) = -\frac{5}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{10}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{9}{6} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

(4)

On peut espérer perdre en moyenne 1,5 point par partie.

Exercice (3):

$$1) \vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BE}$$

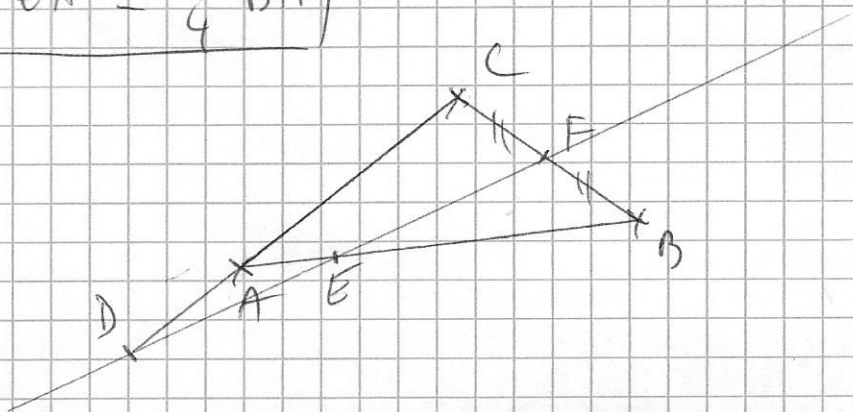
$$= \frac{1}{3} (\vec{BA} + \vec{AE}) \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\vec{EA} + \frac{1}{3} \vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BA}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BA}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{EA} = \frac{1}{4} \vec{BA}}$$

2)



3) Méthode ①.

$$a) \vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= \vec{EA} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \quad (\text{car F milieu de } [BC])$$

$$= \frac{1}{4} \vec{BA} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= -\frac{1}{4} \vec{AB} + \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\text{Donc } \vec{EF} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AE} + \vec{EF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{DF} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC}$$

b) On a: $\frac{1}{2} \vec{DF} = \vec{EF}$ d'où $\vec{DF}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires
avec un point commun, donc D, E et F alignés

4) Méthode 2)

5

a) ABC étant non aplati : $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires avec leur origine A en commun.

Donc : $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère du plan.

b) $A(0; 0)$ car A : origine du repère

$$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} \text{ d'où } B(1; 0)$$

$$\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC} \text{ d'où } C(0; 1)$$

$$\vec{AD} = 0\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ d'où } D(0; -\frac{1}{2})$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 0\vec{AC} \text{ d'où } E(\frac{1}{4}; 0)$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } F(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \vec{DE} & (x_E - x_D; y_E - y_D) \\ & (\frac{1}{4} - 0; 0 - (-\frac{1}{2})) \\ & (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{DF} & (x_F - x_D; y_F - y_D) \\ & (\frac{1}{2} - 0; \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})) \\ & (\frac{1}{2}; 1) \end{aligned}$$

On a :

$$x_{\vec{DE}} \times y_{\vec{DF}} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$y_{\vec{DE}} \times x_{\vec{DF}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } x_{\vec{DE}} \times y_{\vec{DF}} = y_{\vec{DE}} \times x_{\vec{DF}} \end{array} \right\}$$

Donc $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires

avec un point commun.

Donc D, E et F sont alignés

Exercice (4) :

1) A_1 : L'aire d'un rectangle = Longueur $\times$ largeur

$$\text{Longueur} = 8 - x$$

$$\text{largeur} = y_A = f(x) = \frac{8}{x+1}$$

D'où

$$A_1 = (8-x) \times \frac{8}{x+1} = \left[\frac{8(8-x)}{x+1} \right]$$

De même: $A_2 = x \times \frac{6x}{x+1} = \boxed{\frac{6x^2}{x+1}}$

(6)

2) $A_1 \geq A_2 \Leftrightarrow \frac{8(8-x)}{x+1} \geq \frac{6x^2}{x+1}$
 $\Leftrightarrow 0 \geq \frac{6x^2 - 64 + 8x}{x+1}$
 $\Leftrightarrow \boxed{\frac{6x^2 + 8x - 64}{x+1} \leq 0}$

b) $x+1 \neq 0$ car $x \in [0; 8]$, $x+1 \geq 1$

Considérons $P(x) = 6x^2 + 8x - 64$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 64 - 4 \times 6 \times (-64)$

$= 1600 > 0$ d'où P admet 2 racines distinctes.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + 40}{12} = \frac{32}{12} = \frac{8 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{3}$

et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 40}{12} = -4$

P est du signe de a à l'extérieur de ses racines:

car, $a = 6 > 0$, d'où $P(x) \leq 0$ par $x \in [-4; \frac{8}{3}]$

car, $x \in [0; 8]$ Donc $x \in [0; \frac{8}{3}]$

Donc: Par $x \in [0; \frac{8}{3}]$, l'aire A_1 est supérieure ou égale à A_2