NOM :	Prénom :	Classe : —	Professeur :
			Mardi 15 mars 2016

CORRIGE

(1)

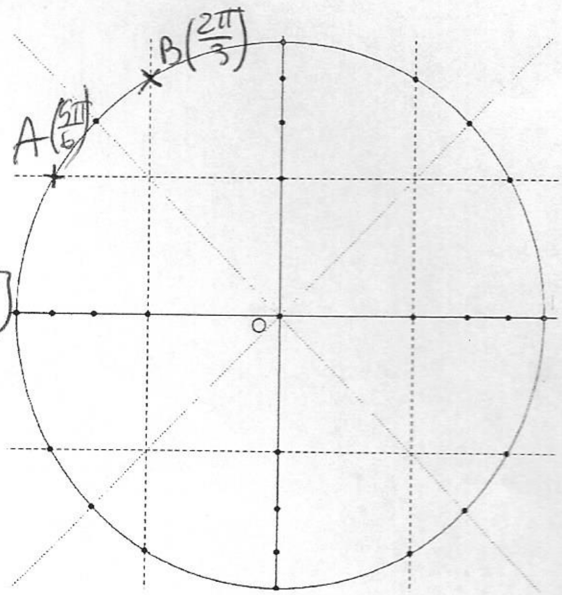
– DEVOIR SURVEILLE : Dérivation, étude de fonctions, trigonométrie –

Documents et calculatrices interdits
Une rédaction peu rigoureuse sera sanctionnée.

Exercice n° 1 : *A traiter directement sur le sujet* : *(5 points)*

1. Déterminer la mesure principale des angles suivants puis placer les points images sur le cercle trigonométrique ci-contre : (justifier)

$\frac{185\pi}{6}$ avec A comme image sur le cercle



1 $\frac{185\pi}{6} \notin]-\pi;\pi]$

$\frac{185\pi}{6} - 30\pi = \frac{185\pi}{6} - \frac{180\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$

Mesure principale : $\frac{5\pi}{6}$

$-\frac{34\pi}{3}$ avec B comme image sur le cercle

1 $-\frac{34\pi}{3} \notin]-\pi;\pi]$

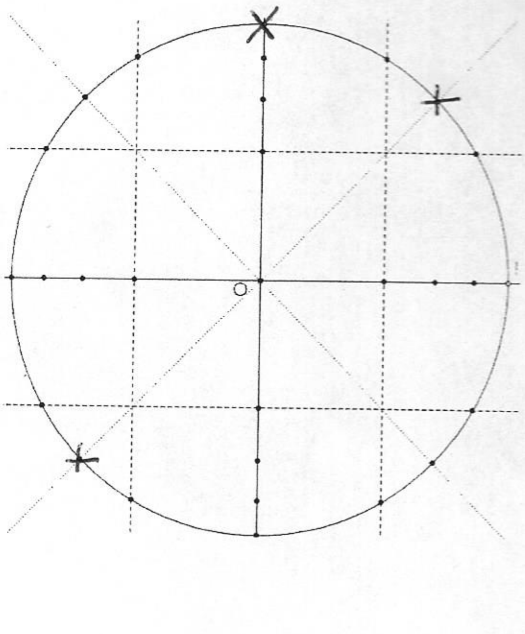
$-\frac{34\pi}{3} = -\frac{34\pi}{3} + 12\pi = -\frac{34\pi}{3} + \frac{36\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$

Mesure principale : $\frac{2\pi}{3}$

2. Construire sur le cercle trigonométrique suivant tous les points représentatifs des réels suivants : (justifier)

0,5 ✓ **en bleu:** $\frac{5\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ X

0,5 ✓ **en vert :** $-\frac{3\pi}{4} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ +



3. Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{173\pi}{3}$ et $\sin\frac{173\pi}{3}$ (justifier) : 1

1

$\frac{173\pi}{3} = \frac{174\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 58\pi - \frac{\pi}{3}$

d'où $\cos\frac{173\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\sin\frac{173\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Exercice n° 2 : A traiter directement sur le sujet : ***(3 points)***

On donne $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = -\frac{\pi}{6}$. Calculer la mesure principale de chacun des angles :

1 ✓ $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$ (Relation de Chasles)

$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, or $\frac{\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$

d'où mesure principale de $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

1 ✓ $(-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) + \pi\ [2\pi]$

(car $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \pi\ [2\pi]$)

$= \frac{\pi}{6} + \pi\ [2\pi]$

$= \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$ or, $\frac{7\pi}{6} \notin]-\pi; \pi]$

$\frac{7\pi}{6} - 2\pi = \frac{7\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$

Mesure principale de $(-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ [-

1 ✓ $(-\overrightarrow{w}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})\ [2\pi]$

$= \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Mesure principale de $(-\overrightarrow{w}, -\overrightarrow{v})$ $\boxed{\frac{\pi}{6}}$ (car $\frac{\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$)

---

(3)

Exercice n° 3 : A traiter directement sur le sujet : *(4 points)*

ABC est un triangle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

H est le pied de la hauteur issue du sommet A.

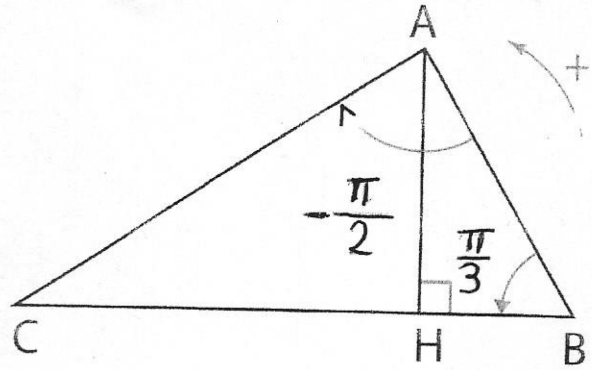
Déterminer la mesure principale de chaque angle (justifier

2

1. $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AB})$

2

2. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$



1) $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AB})$:

$(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AB})$ $[2\pi]$

(relation de Chasles)

$= -\frac{\pi}{3} + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + \pi$ $[2\pi]$

$= \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ Or, $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$

d'où Mesure principale de $(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AB})$: $\boxed{\frac{2\pi}{3}}$

2) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$:

Dans le triangle ABC : $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \pi$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$

or, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ $[2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$

or, $-\frac{\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$

Donc $-\frac{\pi}{6}$: mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 4 :

Partie A :

$$f(x) = \frac{2x^3}{2x-21}$$

1) f est définie si et seulement si $2x-21 \neq 0$

$x \neq \frac{21}{2} = 10,5$

Donc : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{10,5\}$

2) f est dérivable sur tout intervalle contenu dans D_f

$u(x) = 2x^3 \qquad u'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2$

$v(x) = 2x-21 \qquad v'(x) = 2$.

On a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

d'où $f'(x) = \frac{6x^2(2x-21) - 2 \times 2x^3}{(2x-21)^2}$

$= \frac{8x^3 - 126x^2}{(2x-21)^2} = \frac{2x^2(4x-63)}{(2x-21)^2}$

Étude du signe de f' :

$(2x-21)^2 > 0$ pour tout $x \in D_f$

$2x^2 \geq 0$, pour tout $x \in D_f$

$\Bigg\}$ D'où le signe de f' ne dépend que de celui de $4x-63$

$4x - 63 \geq 0 \iff x \geq \frac{63}{4} = 15,75$.

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	10,5		15,75		$+\infty$
signe de f'	$-$	||	$-$	0	$+$	
variation de f	$\searrow$	||	$\searrow$	$\simeq 744,2$	$\nearrow$	

$f(15,75) = 744,1875$

$\simeq 744,2$

Partie $\boxed{B}$:

1) Tout d'abord, $x \leq DC$ (par construction)
d'où $x \leq 21$

Si on effectue le pliage avec $x \leq 10,5$, le point C n'ira pas sur le segment [AD]

D'où $\underline{x \in]-10,5 ; 21]}$

2) Dans le triangle MDN, rectangle en D, on applique le théorème de Pythagore : $MN^2 = DN^2 + DM^2$
d'où $DN^2 = MN^2 - DM^2$

Or : $DM = 21 - x$ et $MN = MC = x$.

D'où : $DN^2 = x^2 - (21-x)^2$
$= \cancel{x^2} - 21^2 + 42x - \cancel{x^2}$
$= 42x - 441$

Or, $DN > 0$, d'où $\boxed{DN = \sqrt{42x - 441}}$

3) $\underline{\text{Aire (MDN)}} = \dfrac{DN \times DM}{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{42x-441} \times (21-x)}{2}}$

Les triangles PNM et PMC ont la même surface car ils sont superposables.

$\underline{\text{Aire(MNP)}} = \underline{\text{Aire (PMC)}} = \boxed{\dfrac{x \times y}{2}}$

4) Aire (trapèze CDNP) $= \dfrac{(PC + DN) \times DC}{2} = \dfrac{(y + \sqrt{42x-441}) \times 21}{2}$, d'une part.

D'autre part : Aire (trapèze CDNP) = Aire (DNM) + Aire (MNP) + Aire (PMC)
$= \dfrac{(21-x) \times \sqrt{42x-441}}{2} + \dfrac{2xy}{2}$

D'où : $21 \times \dfrac{y}{2} = - \dfrac{x\sqrt{42x-441}}{2} + \dfrac{2xy}{2}$

$\Leftrightarrow 21y = -x\sqrt{42x-441} + 2xy$

$\Leftrightarrow y(21-2x) = -x\sqrt{21(2x-21)}$

$\Leftrightarrow y(2x-21) = x\sqrt{21(2x-21)}$

$\Leftrightarrow y = x \times \dfrac{\sqrt{21(2x-21)}}{2x-21} = x\dfrac{\sqrt{21}\sqrt{2x-21}}{\left(\sqrt{2x-21}\right)^2}$ (car $2x-21>0$)

$\Leftrightarrow \quad y = x\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{2x-21}}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = x\sqrt{\dfrac{21}{2x-21}}}$

5) Dans le triangle MPC, rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore : $MP^2 = MC^2 + CP^2 = x^2 + y^2$

$$= x^2 + x^2 \times \frac{21}{2x-21} \quad \text{(d'après 4))}$$

$$= x^2\left(1 + \frac{21}{2x-21}\right)$$

$$= x^2\left(\frac{2x-\cancel{21}+\cancel{21}}{2x-21}\right)$$

$$MP^2 = \frac{2x^3}{2x-21} = f(x) \quad \text{(d'après } \boxed{\text{Partie A}}\text{)}$$

donc

On a : $\boxed{MP = \sqrt{\dfrac{2x^3}{2x-21}}} = \sqrt{f(x)}$

6) D'après le tableau de variation de la partie $\boxed{A}$:

f' s'annule et change de signe en $x = 15,75$.

D'où f admet un minimum local en 15,75 (avec les variations de f).

La longueur MP^2 est minimale pour $x = 15,75$