

Exercice 90:

$$\text{sur } [-3; +\infty[: f(x) = \frac{x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2}$$

1) f est définie si et seulement si $x^2 - 2x + 2 \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 4 - 8 < 0 \text{ d'où le trinôme n'a pas de racine réelle.}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-3; +\infty[$

2) Soit $x \geq -3$:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + 4x - 4}{x^2 - 2x + 2} - \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 4 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x + 2}$$

$$f(x) - 1 = \frac{6x - 6}{x^2 - 2x + 2} = \boxed{\frac{6(x-1)}{x^2 - 2x + 2}}$$

Comme $x^2 - 2x + 2$ n'a pas de racine réelle, il est toujours du signe de a
Or, $a = 1 > 0$, donc $x^2 - 2x + 2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$6(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

c'est-à-dire: $f(x) - 1 \geq 0$, pour $x \geq 1$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 1, \text{ pour } x \geq 1$$

Donc: (f) est au-dessus de (g), quand $x \geq 1$

(f) est en-dessous de (g), quand $x \in [-3; 1]$

3) f est dérivable partout où elle est définie.

c'est-à-dire sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-3; +\infty[$.

$$\text{On pose: } u(x) = x^2 + 4x - 4 \quad u'(x) = 2x + 4$$

$$v(x) = x^2 - 2x + 2 \quad v'(x) = 2x - 2$$

Gna: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2-2x+2) - (2x-2)(x^2+4x-4)}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 8x + 8 - (2x^3 + 8x^2 - 8x - 2x^2 - 8x + 8)}{(x^2-2x+2)^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{-6x^2 + 12x}{(x^2-2x+2)^2}$

Etude du signe de f' : Tout d'abord, $(x^2-2x+2)^2 > 0$, pour tout x

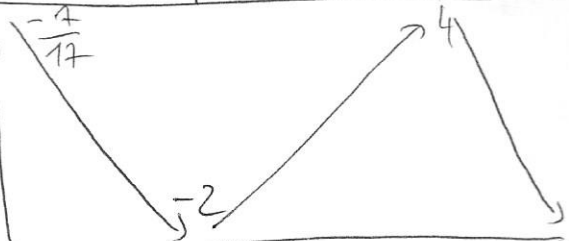
$-6x^2 + 12x = 6x(-x + 2)$: 2 racines : 0 et 2

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines - Or, $a = -6 < 0$

Donc $-6x^2 + 12x \leq 0$ pour $x \in [-3; 0] \cup [2; +\infty[$

et $-6x^2 + 12x \geq 0$ pour $x \in [0; 2]$.

Donc le tableau de variations de f :

x	-3	0	2	$+\infty$	
Signe de f'	-	0	+	0	-
Variation de f					

$$f(-3) = \frac{9-12-4}{9+6+2} = \frac{-7}{17}$$

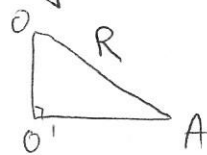
$$f(2) = \frac{4+8-4}{4-4+2} = 4$$

4) Voir la représentation graphique.

Exercice (99): Sphère de centre O et de rayon R

Le triangle $OO'A$ est rectangle en O'

Posons $x = OO'$



D'après le théorème de Pythagore, $OA^2 = OO'^2 + O'A^2$

$\Leftrightarrow R^2 = x^2 + O'A^2$

$\Leftrightarrow O'A^2 = R^2 - x^2$

On a: $V(x)$ = volume du cône.

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi \times O'A^2 \times h \quad \text{avec } h = SO' = R + x$$

D'où $V(x) = \frac{1}{3} \pi \times (R^2 - x^2) \times (R + x)$

$$= \frac{1}{3} \pi \times (-x^3 - Rx^2 + R^2x + R^3)$$

V est un polynôme de degré 3, donc dérivable sur $\mathbb{R}$

D'autre part: $x \in [0; R]$ (d'après l'énoncé).

V est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$V'(x) = \frac{1}{3} \pi \times (-3x^2 - 2Rx + R^2)$$

considérons $-3x^2 - 2Rx + R^2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4R^2 - 4 \times (-3) \times R^2 = 16R^2 > 0$$

Le trinôme a donc 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2R + 4R}{-6} = \frac{6R}{-6} = -R < 0 \quad (\text{impossible car}).$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2R - 4R}{-6} = \frac{-2R}{-6} = \frac{1}{3} R$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = -3 < 0$

D'où $V'(x) \leq 0$, pour $x \in [\frac{1}{3}R; R]$

et $V'(x) \geq 0$, pour $x \in [0; \frac{1}{3}R]$

D'où le tableau de variations de V :

x	0	$\frac{1}{3}R$	R
signe de V'	+	0	-
Variation de V	$\nearrow \frac{1}{3}\pi R^3$	$\frac{32\pi R^3}{81}$	$\searrow 0$

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{3}R\right) &= \frac{1}{3} \pi \times \left(R^2 - \frac{1}{9}R^2\right) \times \left(R + \frac{1}{3}R\right) \\ &= \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{8}{9}R^2\right) \times \frac{4}{3}R \\ &= \frac{32\pi}{81} R^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{1}{3} \pi \times \underbrace{(R^2 - R^2)}_{=0} \times (2R) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le volume du cône est maximum pour $x = OO' = \boxed{\frac{1}{3}R}$