

Exercice (1): $u_n = -12n + 5$

$$1) u_0 = -12 \times 0 + 5 = [5], u_1 = -12 \times 1 + 5 = [-7], u_2 = -12 \times 2 + 5 = [-19]$$

$$u_3 = -12 \times 3 + 5 = [-31]$$

$$2) u_{n+1} - u_n = -12(n+1) + 5 - (-12n + 5)$$

$$= -12n - 12 + 5 + 12n - 5$$

$$= -12, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -12 et de 1^{er} terme $u_0 = 5$

$$3) S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \text{nbre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$= (n+1) \times \frac{5 + u_n}{2} \quad \text{Or, } u_n = u_0 + n \times r = 5 - 12n$$

$$\text{Donc: } S = (n+1) \frac{5 - 12n}{2} = \underline{(n+1)(5 - 6n)}$$

Exercice (2): $v_n = 7(1+\sqrt{3})^n$

$$1) v_0 = 7 \times (1+\sqrt{3})^0 = [7] \quad v_1 = 7 \times (1+\sqrt{3}) = [7 + 7\sqrt{3}]$$

$$v_2 = 7(1+\sqrt{3})^2 = 7(1 + 2\sqrt{3} + 3) = 7(4 + 2\sqrt{3}) = [28 + 14\sqrt{3}]$$

$$v_3 = 7(1+\sqrt{3})^3 = 7(1+\sqrt{3})^2 \times (1+\sqrt{3}) = (28 + 14\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

$$= 28 + 28\sqrt{3} + 14\sqrt{3} + 42$$

$$= [70 + 42\sqrt{3}]$$

$$2) v_{n+1} = 7(1+\sqrt{3})^{n+1}$$

$$\text{Donc } \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{7(1+\sqrt{3})^{n+1}}{7(1+\sqrt{3})^n} = 1+\sqrt{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1+\sqrt{3}$ et de 1^{er}terme $v_0 = 7$.

$$3) S = v_0 + v_1 + \dots + v_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - \text{raison}}{1 - \text{raison}}$$

$$= v_0 \times \frac{1 - (1+\sqrt{3})^{n+1}}{1 - (1+\sqrt{3})} = 7 \times \frac{1 - (1+\sqrt{3})^{n+1}}{-\sqrt{3}} = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{3} [(1+\sqrt{3})^{n+1} - 1]}$$

Exercice (3):

(2)

$$1) S_1 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots + \frac{1024}{59049}$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Avec la calculatrice, on trouve $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049}$

Or, pour $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$\text{D'où } S_1 = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{\frac{1}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \right] \approx 2,97$$

$$2) S_2 = 2 - 9 - 20 - 31 - \dots - 163$$

$$= 2 + (-9) + (-20) + (-31) + \dots + (-163)$$

(un/n

On ajoute les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique, de raison -11 et de premier terme 2 .

$$\text{Posons } u_n = -163 = u_0 + n \cdot r = 2 - 11n$$

$$\Leftrightarrow -163 = 2 - 11n$$

$$\Leftrightarrow -165 = -11n$$

$$\Leftrightarrow n = 15$$

Or, $S_2 = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$

$$= 16 \times \frac{2 + (-163)}{2}$$

$$= 8 \times (-161) = -1288$$

Exercice (4):

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n - 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) On calcule u_1, u_2 : $u_1 = \frac{3}{5} u_0 - 1 = \frac{3}{5} \times (-2) - 1$

$$= -\frac{6}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{11}{5}$$

$$u_2 = \frac{3}{5} u_1 - 1 = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{11}{5}\right) - 1$$

$$= -\frac{33}{25} - \frac{25}{25} = -\frac{58}{25}$$

$$u_1 - u_0 = -\frac{11}{5} + 2 = -\frac{11}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{1}{5} \quad \left| \quad u_2 - u_1 = -\frac{58}{25} + \frac{11}{5} \right.$$

$$= -\frac{58}{25} + \frac{55}{25} = -\frac{3}{25}$$

(3)

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{11}{5} \times \frac{1}{-2} = \frac{11}{10} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = -\frac{38}{25} \times \left(-\frac{5}{11}\right) = +\frac{58}{55}$$

Or $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

2) $v_n = u_n + \frac{5}{2}$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{3}{5} u_n - 1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{5} u_n + \frac{3}{2}$

$$= \frac{3}{5} \left(u_n + \frac{5}{3} \times \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{5} \left(u_n + \frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{5} v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 + \frac{5}{2} = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Comme (v_n) est géométrique: $v_n = v_0 \times q^n$

Donc $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Or, $u_n = v_n - \frac{5}{2}$

Donc $u_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{5}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) a) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (car (v_n) suite géométrique)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{2}{5}}$$

$$S_n = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

b) $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(v_0 - \frac{5}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{5}{2}\right) + \dots + \left(v_n - \frac{5}{2}\right)$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n - \frac{5}{2} \times (n+1)$$

$$= S_n - \frac{5}{2} (n+1)$$

Donc: $T_n = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) - \frac{5}{2} (n+1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice (5):

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

1) $u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0 + 3} = \frac{-3 + 4}{-1 + 3} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{3u_1 + 4}{u_1 + 3} = \frac{3 \times \frac{1}{2} + 4}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{\frac{3}{2} + 4}{\frac{7}{2}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{11}{7}$

$$u_3 = \frac{3u_2 + 4}{u_2 + 3} = \frac{3 \times \frac{11}{7} + 4}{\frac{11}{7} + 3} = \frac{\frac{33}{7} + \frac{28}{7}}{\frac{11}{7} + \frac{21}{7}} = \frac{\frac{61}{7}}{\frac{32}{7}} = \frac{61}{7} \times \frac{7}{32} = \boxed{\frac{61}{32}}$$

$$2) \quad u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \quad u_2 - u_1 = \frac{11}{7} - \frac{1}{2} = \frac{22}{14} - \frac{7}{14} = \frac{15}{14}$$

Or $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{11}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{7} \times \frac{2}{1} = \frac{22}{7}$$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u) n'est pas géométrique.

$$3) \quad v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{3u_n + 4}{u_n + 3} + 2}{\frac{3u_n + 4}{u_n + 3} - 2} = \frac{\frac{3u_n + 4 + 2u_n + 6}{u_n + 3}}{\frac{3u_n + 4 - 2u_n - 6}{u_n + 3}} = \frac{5u_n + 10}{u_n - 2} = \frac{5(u_n + 2)}{u_n - 2} = 5 \frac{u_n + 2}{u_n - 2} = 5v_n$$

Donc (v) est une suite géométrique de raison 5, de premier terme v_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{u_0 - 2} = \frac{-1 + 2}{-1 - 2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b) Comme (v) est géométrique:

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 5^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Or, } v_n = \frac{u_n + 2}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_n + 2 = v_n u_n - 2v_n \Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = -2v_n - 2 \Leftrightarrow u_n(1 - v_n) = -2(v_n + 1) \Leftrightarrow u_n = \frac{-2(v_n + 1)}{1 - v_n}$$

$$\text{Donc: } u_n = \frac{-2(1 - \frac{1}{3} \times 5^n)}{1 + \frac{1}{3} \times 5^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exercice (6):

(8)

1) p_0 : prix en 2015 d'où $p_0 = 15,5 \text{ €}$

p_1 : prix en 2016

Après une hausse de 1%: $p_1 = 15,5 \times 1,01$
 $\approx \underline{15,66 \text{ €}}$

p_2 : prix en 2017

Après une hausse de 1%: $p_2 = p_1 \times 1,01$
 $\approx \underline{15,81 \text{ €}}$

2) $p_{n+1} = p_n \times 1,01$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(p_n) est une suite géométrique de raison 1,01 et de premier terme $p_0 = 15,5$

3) Comme (p_n) est géométrique: $p_n = p_0 \times q^n$
 $= 15,5 \times 1,01^n$

En 2030, $n = 15$ ($2015 + 15 = 2030$)

$p_{15} = 15,5 \times 1,01^{15} \approx \underline{18 \text{ €}}$

Exercice (7):

1) $p_{n+1} = p_n + 12$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(p_n) suite arithmétique de raison 12 et de premier terme $p_0 = 500$

2) Comme (p_n) est arithmétique: $p_n = p_0 + n \times r$
 $= 500 + 12n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) En 2023, $n = 10$ ($2013 + 10 = 2023$)

$p_{10} = 500 + 12 \times 10 = 500 + 120 = \underline{620 \text{ €}}$

4) De 2013 à 2023, chaque employé va recevoir $p_0 + p_1 + \dots + p_{10}$

Or, $p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$
 $= 11 \times \frac{500 + 620}{2} = 6160$

Chaque employé va recevoir $\underline{6160 \text{ €}}$ de 2013 à 2023 inclus.