

QCM:

1) $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6} = \left\lfloor \frac{25}{30} \right\rfloor$

Réponse (C)

2) $\vec{AB}(1; -9)$ Vecteur directeur:

$$\begin{cases} -b = 1 \\ a = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = -1 \end{cases}$$

D'où $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne

$$9x + y = 0$$

Réponse (B)

3) $u_n = -\frac{2}{3}n + 5$, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3}(n+1) + 5$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{n+1} - u_n &= -\frac{2}{3}n - \frac{2}{3} + 5 + \frac{2}{3}n - 5 \\ &= -\frac{2}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Par conséquent:

 (u_n) est arithmétique de raison $-\frac{2}{3}$ - Réponse (A)

4) $S = 1 + 2 + \dots + 100$

$$+ S = 100 + 99 + \dots + 1$$

$$2S = 101 + 101 + \dots + 101$$

$$= 100 \times 101$$

$$\text{D'où } S = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

Réponse (A)

5) $(-\vec{u}, 3\vec{v}) = (\vec{u}, 3\vec{v}) + \pi [2\pi]$

$$= (\vec{u}, \vec{v}) + \pi [2\pi]$$

Réponse (B)

6) $|2 - 3x| = -4$ n'a pas de solution, car $|2 - 3x| \geq 0$

(Une valeur absolue est toujours positive ou nulle)

Réponse (A)

7) $(5x - 7)^2 + 9 < 0$

$$(5x - 7)^2 \geq 0 \text{ d'où}$$

$$(5x - 7)^2 + 9 \geq 9$$

Donc cette inéquation n'a pas de solution -

Réponse (B)

8) (D): $4x - 3y + 5 = 0$ $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à (D) (2)
d'où $\vec{n}(4; -3)$

Réponse (C)

9) Sur $[2; +\infty[$, $f(x) = \frac{-2}{3x-5} = \frac{-2}{u(x)}$ avec $u(x) = 3x-5$

f est dérivable sur $[2; +\infty[$, $f'(x) = -2 \times \frac{u'(x)}{\{u(x)\}^2} = -2 \times \frac{-3}{(3x-5)^2}$
 $= \frac{6}{(3x-5)^2} > 0$

D'où f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

Réponse (B)

10) $u_{20} = u_7 \times 5^{20-7}$, car (u_n) géométrique de raison 5
d'où $u_{20} = 9 \times 5$

Réponse (A)

Exercice (2):

1) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x + \frac{13122}{x^2}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 2 - \frac{13122}{x^2}$

$$= \frac{2x^2 - 13122}{x^2} = \frac{2(x^2 - 6561)}{x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 81^2)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-81)(x+81)}{x^2}$$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ - on a $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$\frac{2\pi}{3} \in [0; 4\pi[$, mais $-\frac{2\pi}{3} \notin [0; 4\pi[$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \in [0; 4\pi[$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{mais: } \frac{8\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{14\pi}{3} \notin [0; 4\pi[$$

$$\text{et } \frac{4\pi}{3} \in [0; 4\pi[$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} \in [0; 4\pi[$$

Par conséquent:

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3} \right\}$$

3) $(d_1): 2x - 3y + 5 = 0$

(3)

Comme $(d_2) \parallel (d_1)$, on peut avoir pour équation cartésienne de (d_2) :

$$(d_2): 2x - 3y + c = 0$$

Or, $A(5; -2) \in (d_2)$ d'où $2 \times 5 - 3 \times (-2) + c = 0$

$$\Leftrightarrow 10 + 6 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -16$$

Par conséquent: $(d_2): 2x - 3y - 16 = 0$

4) Notons (T_{-2}) : la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2

$$(T_{-2}): y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$$

$$= f'(-2)(x + 2) + f(-2).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme:

$$f'(x) = 5 \times 3x^2 - 2 \times 1$$

$$= 15x^2 - 2$$

$$f'(-2) = 15 \times (-2)^2 - 2$$

$$= 58$$

$$f(-2) = 5 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + 1$$

$$= -40 + 4 + 1$$

$$= -35.$$

d'où: $(T_{-2}): y = 58(x + 2) - 35$

$$= 58x + 116 - 35$$

Donc: $(T_{-2}): y = 58x + 81$

5) $A(3; -1)$ $B(7; 2)$ $C(-4; 1)$ $D(9; -5)$

$$\vec{AB}(4; 3) \quad \vec{CD}(13; -6)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 \times 13 + 3 \times (-6)$$

$$= 52 - 18 = 34$$

6) $\cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x - \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$= -2\cos x + \cos x$$

$$= -\cos x$$

7) $J(5; 1)$ $K(-2; 4)$ Notons $(\mathcal{C})$: Cercle de diamètre $[JK]$ (4)

Soit $M(x; y) \in (\mathcal{C})$:

$$M(x; y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$$

Or, $\overrightarrow{MJ}(5-x; 1-y)$ $\overrightarrow{MK}(-2-x; 4-y)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} &= (5-x)(-2-x) + (1-y)(4-y) \\ &= -10 - 5x + 2x + x^2 + 4 - y - 4y + y^2 \\ &= x^2 - 3x + y^2 - 5y - 6 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + y^2 - 5y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 6$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{34}{4} + \frac{24}{4} = \frac{58}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{58}{4} \quad (\text{Equation cartésienne de } (\mathcal{C}))$$

8) $R(x) = \frac{5x}{3+x^2}$, R est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose: $u(x) = 5x$ $u'(x) = 5$

$v(x) = 3+x^2$ $v'(x) = 2x$

$$R'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5(3+x^2) - 2x \times 5x}{(3+x^2)^2} = \frac{15 + 5x^2 - 10x^2}{(3+x^2)^2} \\ &= \frac{-5x^2 + 15}{(3+x^2)^2} \end{aligned}$$

$(3+x^2)^2 > 0$ - Étude du signe de $-5x^2 + 15$

$$-5x^2 + 15 \geq 0$$

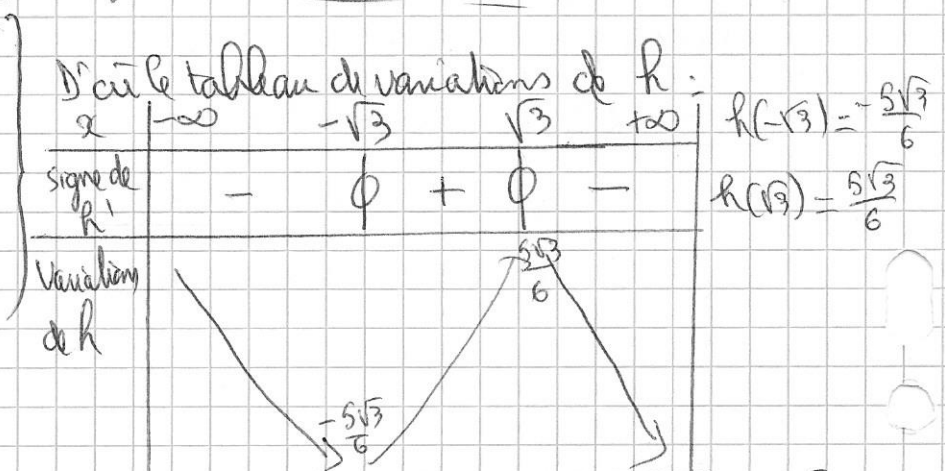
$$\Leftrightarrow 5x^2 \leq 15$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

En $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$, R' s'annule et

change de signe.



R admet donc 2 extremums locaux en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ qui valent respectivement: $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ et $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

9) $P(1;6)$ $Q(-4;2)$

(5)

Appelons (d) la médiatrice de $\{PQ\}$:

$\vec{PQ}(-5; -4)$

$\vec{PQ}$ est un vecteur normal à (d) .

Il a une équation cartésienne de (d) est:

$(d): -5x - 4y + c = 0$

Or, M : le milieu de $\{PQ\}$ appartient à (d)

et $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = -\frac{3}{2}$ et $y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} = 4$

$-5 \times (-\frac{3}{2}) - 4 \times 4 + c = 0 \Leftrightarrow \frac{15}{2} - 16 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = \frac{17}{2}$

Donc: $(d): -5x - 4y + \frac{17}{2} = 0$

10) $f(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x-2}$ - f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

x est un antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Or, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} > 0$ Ce trinôme admet deux racines distinctes.

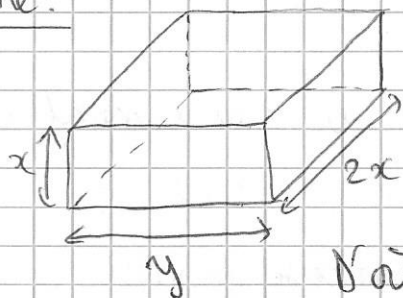
$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2}$

$= -1$

Donc: les antécédents de 0 par f sont -1 et $\frac{1}{2}$

Problème:

1)



$1 \leq x \leq 2$

V : volume d'une dose

$V = x \times y \times 2x = 2x^2 y = 12$

Or $2x^2 y = 12$

$\Leftrightarrow y = \frac{12}{2x^2} = \frac{6}{x^2}$

2) a) $S(x) = 2 \times x \times y + 2 \times 2x \times x + 2 \times y \times 2x$ (par les aires des rectangles qui sont les faces de ce solide)

$$S(x) = 2x \times \frac{6}{x^2} + 4x^2 + 4x \times \frac{6}{x^2}$$

$$= \frac{12}{x} + 4x^2 + \frac{24}{x}$$

Donc $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x}$ sur $[1; 2]$

b) S est dérivable sur $[1; 2]$ et :

$$S'(x) = 4 \times 2x - \frac{36}{x^2} = 8x - \frac{36}{x^2}$$

$$= \frac{8x^3 - 36}{x^2}$$

$$= \frac{8(x^3 - \frac{36}{8})}{x^2} = \frac{8(x^3 - \frac{9}{2})}{x^2}$$

Or, $x^2 > 0$ et $8 > 0$

Donc S' est du signe de $x^3 - \frac{9}{2}$

3) $u(x) = x^3 - \frac{9}{2}$, sur $[1; 2]$

a) u est dérivable sur $[1; 2]$ car c'est un polynôme :

$$u'(x) = 3x^2 > 0$$

On a le tableau de variation de u sur $[1; 2]$:

x	1	2
Signe de u'	+	
Variation de u	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

$$u(1) = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$u(2) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

b) D'après le tableau de variations de u :

$$u(1) < 0 \text{ et } u(2) > 0 \text{ avec } u \text{ strictement croissante}$$

On a il existe $\alpha \in [1; 2]$, tel que $u(\alpha) = 0$

(Remarque: En terminale, un théorème d'analyse permettra de justifier l'existence et l'unicité de cette solution (théorème des valeurs intermédiaires))

A la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 1,7$ (en affichant un tableau de valeurs ou en calculant $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$)

c)

x	1	x	2
Signe de $u(x)$	-	0	+

7

4) D'ici le tableau de variations de S :

x	1	x	2
Signe de S'	-	0	+
Variations de S	40	$S(x)$	34

Après 2 b), S' est du même signe que u

$$S(1) = 4 + 36 = 40$$

$$S(2) = 16 + 18 = 34$$

5) a) Pour $x = x$, S est minimale car en $x = x$, S' s'annule et change de signe.
(minimum local).

on a vu que $x \approx 1,7 \text{ cm}$.

b) Dimensions de la dose: $x, y, 2x$
 $x, \frac{6}{x^2}, 2x$

d'ici: $1,7 \text{ cm} \times 2,1 \text{ cm} \times 3,4 \text{ cm}$