NOM :.. Prénom ....

Première S4	**Devoir de mathématiques** *Suites*	Fait le 19/02/15

CORRIGÉ

– Calculatrices autorisées
– Durée : 50 min

Observations :
NOTE :

Exercice 1 : (/6)

Questions	**Calculs et résultats :**
1) Soit (u_n) suite arithmétique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 = -1$. Calculer u_{15}. (1)	comme (u_n) arithmétique, $u_n = u_0 + nr$ D'où $u_{15} = u_0 + 15 \times r = -1 + 15 \times \frac{4}{5}$ $= -1 + 3 \times 4 = \boxed{11}$
2) Soit (v_n) suite arithmétique telle que $v_5 = -3$ et $v_{11} = 9$. Calculer v_{20} (2)	comme (v_n) arithmétique, $v_n = v_p + (n-p) \times r$ d'où : $v_{11} = v_5 + (11-5) \times r$ $\Leftrightarrow 9 = -3 + 6r$ $\Leftrightarrow \frac{12}{6} = r = 2$ $v_{20} = v_{11} + 9 \times 2 = 9 + 18 = \boxed{27}$
3) Soit (w_n) suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ avec $w_3 = \frac{5}{3}$. Calculer w_{20} (1)	comme (w_n) géométrique, $w_n = w_p \times q^{n-p}$ D'où $w_{20} = w_3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{20-3} = \frac{5}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{17}$ $\simeq \boxed{9{,}7 \times 10^{-11}}$
4) Soit (x_n), suite arithmétique de raison 0,7 et de premier terme $x_3 = -4$. Calculer $S = x_3 + x_4 + x_5 + ... + x_{28}$ (2)	$S =$ nombre de termes $\times \frac{1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$ (car (x_n) suite arithmétique) $= (28-3+1) \times \frac{-4 + x_{28}}{2} = \frac{26}{2} \times (-4 + x_{28}) = 13 \times (-4 + x_{28})$ or, $x_{28} = x_3 + 25 \times 0{,}7 = -4 + 25 \times 0{,}7 = 13{,}5$

Donc : $S = 13 \times (-4 + 13{,}5) = \boxed{123{,}5}$

(/3) **Exercice 2 :** Calculer la somme suivante en détaillant les étapes :

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + ... + \frac{6561}{65536}$$

$S = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de 1er terme $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

ou $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ (avec $q \neq 1$)

et on applique la formule du cours) (2)

Avec la calculatrice, calculons n :

$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{6561}{65536} \Leftrightarrow 3^n = 6561$ et $4^n = 65536$

on trouve $n = 8$. (1) D'où $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^9}{1-\frac{3}{4}} = 4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \simeq \boxed{3{,}7}$

Exercice 3 : 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = 9u_n - 2 \\ u_0 = \ \ 4 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3

$u_1 = 9u_0 - 2 = 9\times 4 - 2 = \boxed{34}$

1,5

$u_2 = 9u_1 - 2 = 9\times 34 - 2 = \boxed{304}$

$u_3 = 9u_2 - 2 = 9\times 304 - 2 = \boxed{2734}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni arithmétique, ni géométrique

$u_1 - u_0 = 34 - 4 = 30$ | $u_2 - u_1 = 304 - 34 = 270$, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

2

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{34}{4} = 8,5$ | $\frac{u_2}{u_1} = \frac{304}{34} \simeq 8,94$, $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, donc (u_n) n'est pas géométrique

3) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{1}{4}$

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique (On donnera son premier terme et sa raison)

1,5

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4} = 9u_n - 2 - \frac{1}{4} = 9u_n - \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = 9u_n - \frac{9}{4} = 9\left(u_n - \frac{1}{4}\right) = 9v_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de 1er terme $v_0 = u_0 - \frac{1}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ et de raison 9

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n

1,5

Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times 9^n = \frac{15}{4}\times 9^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n

1,5

$u_n = v_n + \frac{1}{4} = \frac{15}{4}\times 9^n + \frac{1}{4}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

BONUS

4) On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

a) Calculer $v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ Comme (v_n) est géométrique :

$v_0 + v_1 + ... + v_n = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - 9^{\text{nbre de termes}}}{1-9} = v_0 \times \frac{1-9^{n+1}}{1-9} = \frac{15}{4\times(-8)}\times(1-9^{n+1})$

$= -\frac{15}{32}(1 - 9^{n+1})$

b) En déduire le calcul de S_n

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \left(v_0 + \frac{1}{4}\right) + \left(v_1 + \frac{1}{4}\right) + ... + \left(v_n + \frac{1}{4}\right)$

$= v_0 + v_1 + ... + v_n + \frac{1}{4}\times(n+1) = -\frac{15}{32}(1 - 9^{n+1}) + \frac{1}{4}(n+1)$

Exercice 4 : 3

La population d'une ville est de 43 000 habitants en 2015. On estime que, chaque année, cette population augmente de 6% .

On note p_n : la population de cette ville à l'année 2015 + n.

On suppose que l'évolution est la même chaque année

1) Déterminer p_0, p_1 et p_2 en justifiant

$P_0 = 43\,000$ 0,5

$P_1 = 43\,000 \times 1,06$ (car hausse de 6 %). 0,5

$= 45\,580$

1,5

$P_2 = P_1 \times 1,06$ (hausse de 6%) $= 45\,580 \times 1,06 \simeq 48\,315$ 0,5

2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a $P_{n+1} = P_n \times 1,06$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ 0,5

1,5

Donc (P_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme $P_0 = 43\,000$ 0,5 0,5

Bonus

3) Calculer la population estimée de cette ville en 2030

$2030 = 2015 + 15$, on calcule $P_{15} = P_0 \times 1,06^{15} = 43\,000 \times 1,06^{15} \simeq 103\,052$