

## Exercice (1):

- 1)  $f(-2)$ : Image de -2 par  $f = -2$  (par lecture graphique)  
 2)  $f'(-1,5)$ : coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse -1,5

Or, au point C, la tangente à la courbe de  $f$  est horizontale

Donc:  $f'(-1,5) = 0$

- 3) (JK) est la tangente à la courbe de  $f$  au point J.

J  $(-\frac{1}{2}; -1)$  K  $(0; 0,5)$

Equation réduite de (JK):  $y = ax + b$

avec  $a = \frac{y_K - y_J}{x_K - x_J} = \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{0 - (-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{1} = 3$

D'où (JK):  $y = 3x + b$

Or, K  $\in$  (JK):  $\frac{1}{2} = 3 \times 0 + b$  d'où  $b = \frac{1}{2}$

Donc: (JK):  $y = 3x + \frac{1}{2}$

- 4) Sur  $[-2, 4; -1,5[ \cup ]0,25; 1,25]$   $f$  est strictement décroissante  
 c'est-à-dire  $f' < 0$

- sur  $] -1,5; 0,25[ \cup ]1,25; 2]$ ,  $f$  est strictement croissante  
 c'est-à-dire  $f' > 0$

D'où l'inéquation:  $f'(x) > 0$

admet pour solutions  $S = ] -1,5; 0,25[ \cup ]1,25; 2]$

## Exercice (2):

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est un polynôme et:

$$f'(x) = -5 \times 4x^3 + 11 \times 3x^2 - 7 \times 2x + 1$$

$$= -20x^3 + 33x^2 - 14x + 1$$

$g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  car  $x \mapsto 3\sqrt{x}$  dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On pose:  $u(x) = 3\sqrt{x}$

$v(x) = 2x^2 - 5$

$u'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$v'(x) = 2 \times 2x = 4x$

on a:

$$g(x) = u(x)v(x)$$

$$\text{d'où : } g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ = \frac{3}{2\sqrt{x}}(2x^2 - 5) + 4x \cdot 3\sqrt{x}$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}(2x^2 - 5) + 12x\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{4}{-2x+1}$$

valeurs interdites:  $-2x+1=0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

On peut dériver  $h$  par exemple sur  $]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$h(x) = 4x \cdot \frac{1}{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = -2x+1$$

$$u'(x) = -2$$

$$\underline{h'(x)} = 4x \cdot \frac{-u'(x)}{(u(x))^2} = \frac{8}{(-2x+1)^2}$$

$$i(x) = \frac{1-3x}{7x+5}$$

valeurs interdites:  $7x+5=0$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}$

On peut dériver  $i$  sur  $]-\frac{5}{7}; +\infty[$ :

$$u(x) = 1-3x$$

$$v(x) = 7x+5$$

$$u'(x) = -3$$

$$v'(x) = 7$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{d'où } i'(x) = \frac{-3(7x+5) - 7(1-3x)}{(7x+5)^2} \\ = \frac{-21x - 15 - 7 + 21x}{(7x+5)^2}$$

$$\underline{i'(x) = \frac{-22}{(7x+5)^2}}$$

Exercice (3):  $f(x) = -x^4 + x^3 + 2$

1)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est un polynôme

$$\underline{f'(x) = -4x^3 + 3x^2}$$

$$2) f'(x) = x^2(3-4x)$$

$x^2 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$$3-4x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}$$

D'ici le tableau de signes de la dérivée de  $f$ :

3

| $x$              | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|-----|---------------|-----------|
| Signe de $x^2$   | +         | 0   | +             | +         |
| Signe de $3-4x$  | +         |     | + 0           | -         |
| Signe de $f'(x)$ | +         | 0   | + 0           | -         |

D'ici le tableau de variations de  $f$ :

| $x$               | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|-----|---------------|-----------|
| Signe de $f'$     | +         | 0   | + 0           | -         |
| Variations de $f$ |           |     |               |           |

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2$$

$$= \frac{539}{256} \approx \underline{2,1}$$

$$3) (T_{-1}): y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$= (4+3)(x+1) + 0$$

$$\text{Donc } \underline{y} = 7(x+1) = \underline{7x+7}$$

Exercice (h):

Partie (A):

$$f(x) = \frac{2(x^2+16)}{x+4}$$

On se place sur  $[0; 4]$

1)  $f$  est bien dérivable sur  $[0; 4]$  car  $f$  est un quotient  
 $f$  est dérivable partout où elle est définie.

$$\text{On pose } u(x) = 2(x^2+16) \quad u'(x) = 2 \times 2x = 4x$$

$$v(x) = x+4$$

$$v'(x) = 1$$

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{D'ici } f'(x) = \frac{4x(x+4) - 2(x^2+16)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 16x - 2x^2 - 32}{(x+4)^2} = \frac{2x^2 + 16x - 32}{(x+4)^2}$$

$$\text{Donc } \underline{f'(x)} = \underline{\frac{2(x^2+8x-16)}{(x+4)^2}}$$

2) Tout d'abord,  $(x+4)^2 > 0$  pour  $x \in [0; 4]$

Étude du signe de  $x^2 + 8x - 16$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 64 = 128 > 0.$$

Le trinôme admet donc deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{128}}{2} = \frac{-8 + \sqrt{2 \times 64}}{2} = \frac{-8 + 8\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - 8\sqrt{2}}{2} = -4 - 4\sqrt{2} < 0$$

$$\text{car } x \in [0; 4]$$

Le trinôme est du signe de  $a$  à l'extérieur de ses racines :

$$\text{Car } a = 1 > 0 \quad \text{D'où } x^2 + 8x - 16 \geq 0 \text{ pour } x \in [4\sqrt{2} - 4; 4]$$

D'où le signe de  $f'$  :

| $x$           | 0 | $4\sqrt{2} - 4$ | 4 |
|---------------|---|-----------------|---|
| signe de $f'$ | - | 0               | + |

- Sur  $[0; 4\sqrt{2} - 4]$ ,  $f$  est décroissante

- Sur  $[4\sqrt{2} - 4; 4]$ ,  $f$  est croissante.

D'où le tableau de variations de  $f$  :

| $x$              | 0 | $4\sqrt{2} - 4$    | 4 |
|------------------|---|--------------------|---|
| signe de $f'$    | - | 0                  | + |
| variation de $f$ | 8 | $-16 + 16\sqrt{2}$ | 8 |

$$f(4) = \frac{2 \times 32}{8} = 8$$

$$f(4\sqrt{2} - 4) = -16 + 16\sqrt{2}$$

Partie (B) :

1)  $A(0) =$  Aire totale des 2 triangles quand  $x = 0$  (c'est à dire quand M est confondu avec A)

Dans ce cas,  $I = A$

$$\text{et } \text{Aire}(DI C) = \text{Aire}(ADC) = \frac{\text{Aire}(ABCD)}{2}$$

$$= \frac{16}{2} = 8$$

Comme  $\text{Aire}(AIM) = 0$ , alors  $A(0) = 8 \text{ cm}^2$

Détermination de  $A(h)$ :

(5)

si  $x = h$ ,  $M$  et  $B$  sont confondus

Alors  $AIB$  et  $DI C$  sont isocèles en  $I$  avec des côtés de même longueur.

$$\text{D'où : } \underline{A(h) = \frac{\text{Aire}(ABCD)}{2} = \frac{16}{2} = \underline{8 \text{ cm}^2}}$$

2) Dans le triangle  $AMI$ .

$R$ : hauteur issue de  $I$

Dans le triangle  $ADM$ , rectangle en  $A$ : appelons  $E$  le pied de la hauteur du triangle  $AMI$ , issue de  $I$

on a  $(IE) \parallel (AD)$

$M, I, D$  et d'autre part  $M, E, A$  sont alignés

D'après le théorème de Thalès:  $\frac{ME}{MA} = \frac{IE}{AD} = \frac{MI}{MD}$

$$\frac{x - AE}{x} = \frac{R}{4}$$

or,  $[AC]$  est une diagonale du carré  $ABCD$ .

d'où  $\widehat{EAI} = 45^\circ$  avec  $EAI$  triangle rectangle en  $E$ .

Donc:  $EAI$  est rectangle et isocèle en  $E$

D'où:  $AE = IE = R$ .

$$\text{Donc: } \frac{x - R}{x} = \frac{R}{4} \Leftrightarrow Rx = 4x - 4R$$

$$\Leftrightarrow Rx + 4R = 4x$$

$$\Leftrightarrow R(x + 4) = 4x$$

$$\Leftrightarrow \underline{R = \frac{4x}{x+4}}$$

3)  $A(x) = \text{Aire}(AMI) + \text{Aire}(IDC)$ .

$$= \frac{R \times AM}{2} + \frac{(4 - R) \times DC}{2}$$

$$= \frac{xR}{2} + \frac{4(4 - R)}{2} \quad \text{or, } R = \frac{4x}{x+4} \text{ (question 2)}.$$

D'où:

$$A(x) = \frac{x}{2} \times \frac{4x}{x+4} + 2 \times \left(4 - \frac{4x}{x+4}\right) = \frac{2x^2}{x+4} + 8 - \frac{8x}{x+4}$$

$$= \frac{2x^2 + 8(x+4) - 8x}{x+4}$$

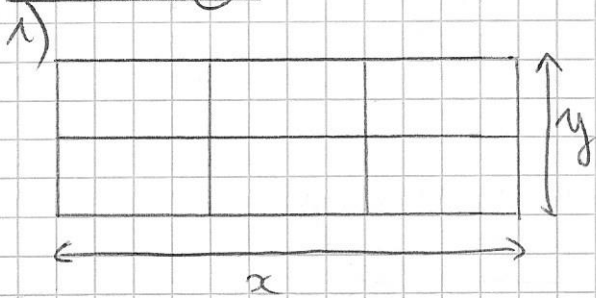
$$= \frac{2x^2 + 32}{x+4} = \boxed{\frac{2(x^2 + 16)}{x+4}}$$

6

4) Voir la question 2 [partie A].

5) D'après le tableau de variations, l'aire est minimale pour  $x = 4\sqrt{2} - 4$ .  
 $4\sqrt{2} - 4 \approx 1,7$  cm. Il faut placer M à environ 1,7 cm de A pour avoir l'aire minimale.

Exercice (5):



Pour fabriquer les 6 cages identiques, il faut 3 guthazes de longueur  $x$  et 4 de longueur  $y$ .

$$\text{D'où } 3x + 4y = 250$$

$$4y = 250 - 3x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(250 - 3x)$$

2) Toutes les cages sont identiques.

La surface totale au sol pour les 6 cages est  $S_{\text{total}} = x \times y$

D'où pour une cage:

$$S(x) = \frac{x \times y}{6} = \frac{x}{6} \times \frac{1}{4}(250 - 3x)$$

(d'après la 1))

$$S(x) = \frac{1}{24}(250x - 3x^2)$$

$$\text{Donc } S(x) = \frac{1}{24}(-3x^2 + 250x)$$

3)  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car c'est un trinôme du second degré

$$S'(x) = -\frac{1}{8} \times 2x + \frac{250}{24} = -\frac{1}{4}x + \frac{125}{12}$$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{125}{12} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{1}{4}x = \frac{125}{12}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x = \frac{125}{3}$$

Variations de  $S$ :

| $x$              | 0 | $\frac{125}{3}$             | $+\infty$  |
|------------------|---|-----------------------------|------------|
| Signe de $S'$    |   | +                           | $\phi$ -   |
| Variation de $S$ | 0 | $\nearrow \frac{15625}{12}$ | $\searrow$ |

$$\frac{125}{3} \approx 41,7$$

$$\frac{15625}{12} \approx 1302,1$$

$S$  est maximale pour  $x = \frac{125}{3}$ . Or,  $y = \frac{1}{4}(250 - 3x)$   
 $= \frac{1}{4}(250 - 3 \times \frac{125}{3})$   
 $= \frac{125}{4} = 31,25$

Dimensions au sol de la cage: 41,7 m x 31,25 m

Exercice (6)

1)  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[$  (T):  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

$S$ : (T) tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $x_0$ : (T):  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Or,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

en  $x_0 = 9$ ,  $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} f'(9)(x - 9) + f(9) &= \frac{1}{6}(x - 9) + \sqrt{9} = \frac{1}{6}(x - 9) + 3 \\ &= \frac{1}{6}x - \frac{9}{6} + 3 \\ &= \frac{1}{6}x - \frac{3}{2} + \frac{6}{2} \\ &= \frac{1}{6}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc: (T) est la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $x_0 = 9$

2)  $g(x) = ax^2 - bx$

(T):  $y = -2x - \frac{7}{4}$

(T) tangente à  $(\mathcal{C}_g)$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$

(T):  $y = g'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2})$

Or a:  $g'(\frac{1}{2}) = -2$ . Or,  $g'(x) = 2ax - b$

$$g'(\frac{1}{2}) = 2a \times \frac{1}{2} - b = \underline{a - b} = \underline{-2}$$

$$\begin{aligned} F(x) = y &= -2(x - \frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) \\ &= -2x + \underbrace{1 + g(\frac{1}{2})}_{-\frac{7}{4}} = -2x - \frac{7}{4} \end{aligned}$$

d'où:  $1 + g(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$

or,  $g(\frac{1}{2}) = a \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2}b$

$$= \frac{a}{4} - \frac{b}{2} = -\frac{7}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{11}{4}$$

d'où  $\underline{a - 2b} = \underline{-11}$

Now obtenons le système:

$$\begin{cases} a - b = -2 & (1) \\ a - 2b = -11 & (2) - (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ -b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 + b = -2 + 9 = 7 \\ b = 9 \end{cases}$$

Par conséquent:  $g(x) = 7x^2 - 9x$