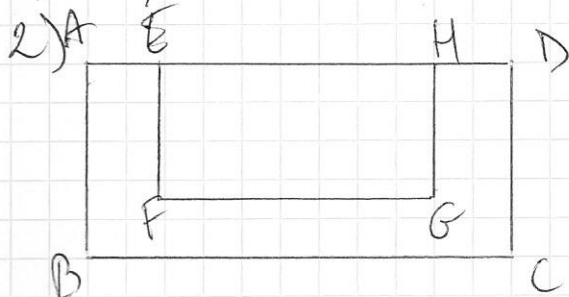


Exercice (1):

1) $0,6 \leq x < 12$ (x ne peut pas dépasser la largeur)



$$\begin{aligned} \text{Aire (allées)} &= \text{Aire (rectangle ABCD)} - \text{Aire (EFGH)} \\ &= 30 \times 12 - (30 - 2x) \times (12 - x) \\ &= 360 - (360 - 30x - 24x + 2x^2) \end{aligned}$$

$$A(x) = 360 - 360 + 54x - 2x^2$$

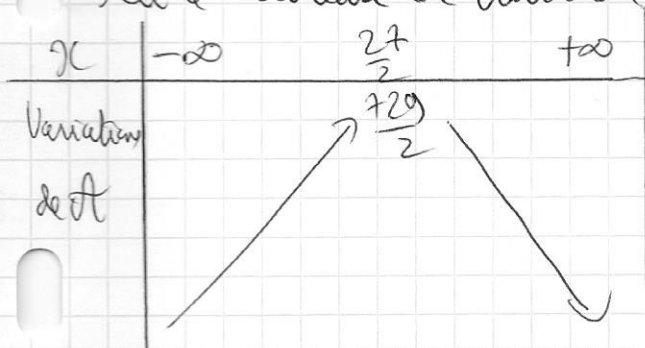
3) $A(x) = -2x^2 + 54x$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 54 \\ c = 0 \end{cases}$

$a = -2 < 0$

donc A est d'abord croissante, puis décroissante.

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-54}{2 \times (-2)} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$ et $\beta = A(x) = A\left(\frac{27}{2}\right) = -2 \times \left(\frac{27}{2}\right)^2 + 54 \times \frac{27}{2} = \frac{729}{2}$

D'après le tableau de variation suivant:



Attention: D'après les raisonnements précédents l'aire est maximale en $x = 12$ et vaut 360 m^2

4) a) On a $360 - A(x) \geq 216$

$\Leftrightarrow A(x) \leq 360 - 216 = 144$

b) $A(x) \leq 144 \Leftrightarrow -2x^2 + 54x - 144 \leq 0$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 54 \\ c = -144 \end{cases}$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 54^2 - 4 \times (-2) \times (-144)$
 $= 1764 > 0$

Le trinôme admet 2 racines distinctes: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-54 + \sqrt{1764}}{-4} = 3$
 et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-54 - \sqrt{1764}}{-4} = 24$

Il est du signe de a à l'extérieur de ses racines - or, $a = -2 < 0$

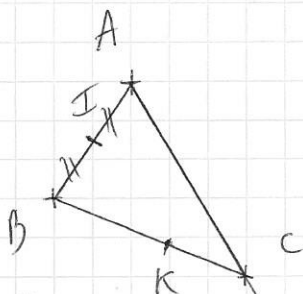
D'après: $-2x^2 + 54x - 144 \leq 0$ pour $x \in]-\infty; 3] \cup [24; +\infty[$

On recoupe avec les données de l'énoncé: $0,6 < x < 12$

Donc: $S = [0,6; 3]$

Exercice (2):

1)



$$2) \vec{BK} + 3\vec{CK} = \vec{0}$$

(2)

$$a) 2\vec{BK} + 3(\vec{CB} + \vec{BK}) = \vec{0} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\Leftrightarrow 5\vec{BK} = 3\vec{BC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BK} = \frac{3}{5}\vec{BC}$$

b) Voir la figure

$$\begin{aligned} 3) \vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AJ} \text{ (relation de Chasles)} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AJ} \text{ (car I milieu de [AB])} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{IK} &= \vec{IB} + \vec{BK} \text{ (relation de Chasles)} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BK} \text{ (car I milieu de [AB])} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BA} + \frac{3}{5}\vec{AC} \text{ (relation de Chasles)} \\ &= -\frac{1}{10}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ On a: } 5\vec{IK} &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{IJ} \\ \text{Or } \vec{IK} \text{ et } \vec{IJ} &\text{ sont colinéaires } \left. \begin{array}{l} \text{avec un point commun} \end{array} \right\} \text{ donc } \underline{\text{I, J et K sont alignés}} \end{aligned}$$

Exercice (3):

A(2; 3) B(6; 1) C(4; -3) et E(-2; 5)

$$1) \vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A) \text{ et } \vec{AB} \text{ est un vecteur directeur de (AB)}$$

$$(4; -2)$$

$$\text{On pose: } \begin{cases} -b = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Or une équation cartésienne de (AB):

$$(AB): -2x - 4y + c = 0$$

$$\text{Or } A \in (AB) \Leftrightarrow -2 \times 2 - 4 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 16$$

$$\text{Donc: } (AB): -2x - 4y + 16 = 0$$

$$-2 \times (-2) - 4 \times 5 + 16 = 4 - 20 + 16 = 0$$

Donc E ∈ (AB) (car ses coordonnées vérifient une équation cartésienne de (AB)).

2) $(d_1) \parallel (AB)$: les vecteurs directeurs de (d_1) sont les 3
mêmes que ceux de (AB)

D'où une équation cartésienne de (d_1) : $-2x - 4y + c = 0$

Or, $C \in (d_1)$ d'où les coordonnées de ce point vérifient l'équation précédente

$$-2 \times 4 - 4 \times (-3) + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

Donc : $(d_1) : -2x - 4y - 4 = 0$

3) (d_2) : médiane issue de B du triangle ABC

Soit M le milieu de $[AC]$:
$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + (-3)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + (-3)}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}} \right\} M(3; -\frac{1}{2})$$

(d_2) est la droite (BM) :

$\vec{BM} (x_M - x_B; y_M - y_B)$ or, $\vec{BM}$ est un vecteur directeur de (BM)
 $(-3; -1)$ on pose : $\begin{cases} -a = -3 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

D'où une équation cartésienne de (d_2) :

$$-x + 3y + c = 0$$

Or, $M \in (d_2)$ d'où $-3 + c = 0 \Rightarrow c = 3$ $(d_2) : -x + 3y + 3 = 0$

4) $(d_3) : 2x + y = 0$ et $(AB) : -2x - 4y + 16 = 0$

Tout d'abord, (d_3) n'est pas parallèle à (AB) (les coefficients ne sont pas proportionnels)

Elles sont donc sécantes.

Soit $I(x; y)$ le point d'intersection cherché :

$(x; y)$ est solution du système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2x - 4y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -2x - 4(-2x) = -16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 6x = -16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x(-\frac{8}{3}) = \frac{16}{3} \\ x = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Donc $I(-\frac{8}{3}; \frac{16}{3})$ point d'intersection des droites (AB) et (d_3) .

Exercice (4):

(4)

$$1) u_n = -3n^2 + 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a) u_0 = -3 \times 0^2 + 2 \times 0 + 1 = \boxed{1} \quad u_1 = -3 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 = -3 + 3 = \boxed{0}$$

$$u_{10} = -3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 = -300 + 21 = \boxed{-279}$$

$$b) u_{n-1} = -3(n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ = -3(n^2 - 2n + 1) + 2n - 2 + 1 \\ = -3n^2 + 6n - 3 + 2n - 1 \\ = \underline{-3n^2 + 8n - 4}$$

$$u_{2n} = -3(2n)^2 + 2 \times 2n + 1 \\ = -3 \times 4n^2 + 4n + 1 \\ = \underline{-12n^2 + 4n + 1}$$

$$2) \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n - \frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$v_n = u_n + \frac{5}{9}$$

$$a) u_1 = \frac{2}{5}u_0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times (-2) - \frac{1}{3} = -\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \boxed{-\frac{17}{15}}$$

$$u_2 = \frac{2}{5}u_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{17}{15}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{34}{75} - \frac{25}{75} = \boxed{-\frac{59}{75}}$$

$$u_3 = \frac{2}{5}u_2 - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{59}{75}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{118}{375} - \frac{125}{375} = \frac{-243}{375} = \boxed{-\frac{81}{125}}$$

$$b) v_0 = u_0 + \frac{5}{9} = -2 + \frac{5}{9} = -\frac{18}{9} + \frac{5}{9} = \boxed{-\frac{13}{9}}$$

$$v_1 = u_1 + \frac{5}{9} = -\frac{17}{15} + \frac{5}{9} = -\frac{51}{45} + \frac{25}{45} = \boxed{-\frac{26}{45}}$$

$$v_2 = u_2 + \frac{5}{9} = -\frac{59}{75} + \frac{5}{9} = \boxed{-\frac{52}{225}}$$

$$c) v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{9} = \frac{2}{5}u_n - \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{9} \\ = \frac{2}{5}\left(u_n + \frac{5}{9}\right) \\ = \underline{\underline{\frac{2}{5}v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}}$$

Exercice (5):

$$1) \cos 3x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

a) Dans $\mathbb{R}$:

on pose $X = 3x$

$$\text{et } \cos X = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad X = \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou } X = -\frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'aut } \exists x = \frac{3\pi}{4} + 2k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k_1}{3}\pi \quad (5)$$

$$\text{ou } \exists x = -\frac{3\pi}{4} + 2k_2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k_2}{3}\pi$$

$$\sin: [0, 2\pi]:$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$2) 2(\sin x)^2 - \sin x = 0 \text{ (E) (dans } \mathbb{R})$$

$$\text{on pose } X = \sin x.$$

$$(E) \Leftrightarrow 2X^2 - X = 0 \Leftrightarrow X(2X - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } 2X - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \text{ } [2\pi]$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} \text{ } [2\pi] \\ = \frac{5\pi}{6} \text{ } [2\pi]$$

Donc:

$$S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$3) (\vec{AD}, \vec{AB}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [2\pi]$$

$$(\vec{AD}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3} \text{ } [2\pi]$$

$$(\vec{BA}, \vec{AC}) = (-\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{AB}, \vec{AC}) + \pi \text{ } [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \pi \text{ } [2\pi]$$

$$= \frac{5\pi}{6} \text{ } [2\pi]$$

Donc une mesure en radians de l'angle $(\vec{BA}, \vec{AC})$ est de $\frac{5\pi}{6}$ rad

$$(\vec{AC}, \vec{BC}) = (-\vec{CA}, -\vec{CB}) \text{ } [2\pi]$$

$$= (\vec{CA}, \vec{CB}) \text{ } [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{3} \text{ } [2\pi] \text{ } \text{Donc } -\frac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de } (\vec{AC}, \vec{BC})$$

$$(\vec{DB}, \vec{CA}) = (\vec{DB}, \vec{DC}) + (\vec{DC}, \vec{CA}) \text{ } [2\pi] \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= -\frac{\pi}{6} + (\vec{CD}, \vec{CA}) + \pi \text{ } [2\pi]$$

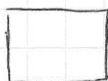
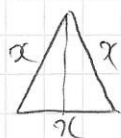
$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \pi \text{ } [2\pi]$$

$$= \frac{2\pi}{3} \text{ } [2\pi] \text{ } \text{Donc } \frac{2\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de } (\vec{DB}, \vec{CA})$$

Exercice (6)

50cm

(6)



Triangle équilatéral : T

carré : C

$$\text{Périmètre}(T) = 3x$$

$$\text{Périmètre}(C) = 50 - 3x$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(T) &= \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \\ &= \frac{x \times x \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(C) &= \left(\frac{50 - 3x}{4} \right)^2 \\ &= \frac{(50 - 3x)^2}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Périmètre}(T) \leq \text{Périmètre}(C)$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 50 - 3x \Leftrightarrow 6x \leq 50 \Leftrightarrow x \leq \frac{25}{3}$$

$$\text{Aire}(T) \geq \text{Aire}(C) \Leftrightarrow x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \geq \frac{(50 - 3x)^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{3}x^2}{16} \geq \frac{2500 - 300x + 9x^2}{16}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x^2 \geq 9x^2 - 300x + 2500$$

$$\Leftrightarrow (4\sqrt{3} - 9)x^2 + 300x - 2500 \geq 0$$

$$\Delta = 300^2 - 4(4\sqrt{3} - 9)(-2500)$$

$$= 40000\sqrt{3} > 0 \quad \text{le trinôme admet 2 racines distinctes :}$$

$$x_1 = \frac{-300 + \sqrt{40000\sqrt{3}}}{2(4\sqrt{3} - 9)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-300 - \sqrt{40000\sqrt{3}}}{2(4\sqrt{3} - 9)}$$

$$\approx 8,88$$

$$\approx 135,9$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

$$\text{car } a = 4\sqrt{3} - 9 < 0$$

Voici le tableau de signes :

Δ	x	$-\infty$	$8,88$	$135,9$	$+\infty$
signe du trinôme		-	0	+	0

Donc :

$$S = [8,9 ; 50] \quad \text{et} \quad x \leq \frac{25}{3}$$

Au final :

$\frac{25}{3} \approx 8,3$ donc est impossible