

Suites et dérivation

Total/30 → 10

①

Exercice (1): ⑤

- 1) La recette diminue en moyenne de 15% chaque semaine.  
 Pour une baisse de 15% le coefficient multiplicateur est de:

$$1 - \frac{15}{100} = 0,85$$

Donc:  $R_{n+1} = R_n \times 0,85$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2) Algorithme:

Variables

$n$ : un entier  
 $R, S$ : des réels

Debut

$n$  prend la valeur 1  
 $R$  prend la valeur 77  
 $S$  prend la valeur 77

Tant que ( $S \leq 500$ ) Fin

$n$  prend la valeur  $n+1$   
 $R$  prend la valeur  $R \times 0,85$   
 $S$  prend la valeur  $S + R$

Fin Tant que

Afficher  $M$ 

Fin

- a)  $R$ : la recette chaque semaine  
 $S$ : recette totale au bout de  $n$  semaines

b) Voir ci-contre.

Exercice (2): ⑤

1)  $u_0 = \frac{3}{0,25}$ ,  $u_1 = \frac{1 - 3 + 2 + 3}{0,25} = 3$ ,  $u_2 = \frac{2^3 - 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 3}{0,25} = 8 - 12 + 4 + 3 = 3$

2)  $u_3 = \frac{3^3 - 3 \times 3^2 + 2 \times 3 + 3}{0,25}$

$$= \frac{27 - 27 + 6 + 3}{0,25}$$

$$= \frac{9}{0,25} \neq 3 \text{ donc les termes ne sont pas tous égaux}$$

3)  $u_n - 3 = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{0,25}$

①  $= \frac{n(n^2 - 3n + 2)}{0,25}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

4)  $u_n = 3 \Leftrightarrow u_n - 3 = 0 \Leftrightarrow n(n^2 - 3n + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n^2 - 3n + 2 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$ , cette équation admet donc deux solutions distinctes.

②  $m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$  et  $m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

Donc:  $u_n - 3 = 0 \Leftrightarrow n = 0, \text{ ou } 1, \text{ ou } 2$ .

Par conséquent: Il n'y a que trois termes de cette suite égaux 3:  $u_0, u_1$  et  $u_2$

Exercice ③: ⑥

1)  $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} = -\frac{n+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n+2}{(n+1)(n+2)}$   
 $= \frac{-n-1+n+2}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $(u_n)$  est strictement croissante.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

3)  $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{3^n \times 3}{2^{n+1} \times 2} = \left(\frac{3^n}{2^{n+1}}\right) \times \frac{3}{2} = v_n \times \frac{3}{2}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Donc  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{3}{2}$  et de premier terme  $v_0 = \frac{3^0}{2} = \frac{1}{2}$

4) Comme  $(v_n)$  est géométrique,  $v_n = v_0 \times q^n$

5)  $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\frac{3}{2} > 1$ , d'où:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

Donc:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Exercice ④: ⑥

1)  $x_1 = \frac{2}{3}x_0 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}x_1 + 1$

$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} + 1$

$= \frac{10}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}$

2)  $x_1 - x_0 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$

$x_2 - x_1 = \frac{19}{9} - \frac{5}{3} = \frac{19}{9} - \frac{15}{9} = \frac{4}{9}$

D) car  $x_2 - x_1 \neq x_1 - x_0$  donc  $(x_n)$  n'est pas arithmétique

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{19}{9}}{\frac{5}{3}} = \frac{19}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{19}{15}$$

(3)

On a:  $\frac{x_1}{x_0} \neq \frac{x_2}{x_1}$

donc  $(x_n)$  n'est pas géométrique

(15)

3)  $y_n = x_n - 3$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}x_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}x_n - 2$$

$$= \frac{2}{3}(x_n - 3)$$

$$= \frac{2}{3}y_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(15)

Donc  $(y_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  et de premier terme

$$y_0 = x_0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

8) Comme  $(y_n)$  est géométrique:

$$y_n = y_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= (-2) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1)

c) Comme  $x_n = y_n + 3$

$$= (-2) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

(1)

Exercice (5)

1)  $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

2)  $(u_n)$  arithmétique avec  $u_1 = 5$  et  $r = \sqrt{2}$

On a:  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$= 50 \times \frac{u_1 + u_{50}}{2}$$

2)  $u_{50} = u_1 + (50-1) \times r$

$$= 5 + 49\sqrt{2}$$

d'où  $S = 25 \times (5 + 5 + 49\sqrt{2})$

$$= 25(10 + 49\sqrt{2})$$

Exercice (6)

1) a)  $R \neq 0$ ,  $\frac{f(2+R) - f(2)}{R} = \frac{3(2+R)^2 - 5(2+R) + 2 - 4}{R}$

$$f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 4$$

$$= \frac{3(h+6h+h^2) - 10 - 5h + 2 - 4}{R}$$

(4)

(15)

$$= \frac{12h + 3h^2 - 5h}{R} = \frac{3h^2 + 7h}{R} = \frac{h(3h+7)}{R}$$

b)  $3h+7$  a une limite finie, quand  $h$  tend vers 0

$$= \frac{3h+7}{R}$$

Donc  $f$  est dérivable en 2 et:  $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

D'où:  $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} (3h+7) = 7$

(15)

$f'(2)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 2

(1)

2) Soit  $h \neq 0$  et  $h \neq 1$

$$\tau(h) = \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \frac{\frac{2}{-1+h} - \frac{2}{-1}}{h}$$

(1)

$$= \frac{\frac{2}{h-1} + \frac{2(h-1)}{h-1}}{h}$$

$$= \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \frac{2h}{h-1} \times \frac{1}{h} = \frac{2}{h-1}$$

Bonus

or,  $\frac{2}{h-1}$  a une limite finie quand  $h \rightarrow 0$

D'où  $g$  est dérivable en -1

avec  $g'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2$

Avec -2 : le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $g$  au point d'abscisse -1