

Exercice (1): $f(x) = 3 + \sqrt{2x-1}$ 1) f est définie si et seulement si $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Donc: $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$

2) Soient $a, b \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ avec $a < b$.

$f(a) = 3 + \sqrt{2a-1}$ et $f(b) = 3 + \sqrt{2b-1}$

$\frac{1}{2} \leq a < b$

$\Leftrightarrow 1 \leq 2a < 2b \Leftrightarrow 0 \leq 2a-1 < 2b-1$

alors $0 \leq \sqrt{2a-1} < \sqrt{2b-1}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

d'où: $3 \leq 3 + \sqrt{2a-1} < 3 + \sqrt{2b-1}$

c'est-à-dire $f(a) < f(b)$

Par conséquent: f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$ 3) a) $\text{sur } D_f$:

$f(x) = 5$

$\Leftrightarrow 3 + \sqrt{2x-1} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 2$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 4$

$\Leftrightarrow 2x = 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

b) La courbe de f et la droite horizontale à l'ordonnée 5 ont un seul point d'intersection d'abscisse $\frac{5}{2}$.Exercice (2): $g(x) = |2x^2 + x - 3|$ et $u(x) = 2x^2 + x - 3$ 1) $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 3 \times 2 = 25 > 0$ d'où le trinôme admet deux racines distinctes. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{4} = -\frac{3}{2}$ Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 2 > 0$

Donc: $u(x) \geq 0$ pour $x \in \left] -\infty; -\frac{3}{2} \right] \cup [1; +\infty[$
 $u(x) < 0$ pour $x \in \left] -\frac{3}{2}; 1 \right[$

2) On utilise le résultat précédent:

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 3, & \text{pour } x \in]-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [1; +\infty[\\ -2x^2 - x + 3, & \text{pour } x \in]-\frac{3}{2}; 1[\end{cases} \quad (2)$$

3) $a = 2 > 0$, donc u est d'abord décroissante, puis croissante

De plus: $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$ $\beta = u(\alpha) = u(-\frac{1}{4})$

Du tableau de variation de u :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Variation de u		$\searrow$	$\nearrow$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right) - 3 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{24}{8} \\ &= -\frac{25}{8} \end{aligned}$$

4) * Sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$: ~~strictement croissante~~

Sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$, u est strictement décroissante

Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$

* Sur $[1; +\infty[$: u est strictement croissante

Donc g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$

* Sur $]-\frac{3}{2}; 1[$ - $g(x) = -2x^2 - x + 3$

$a < 0$, donc g sera croissante, puis décroissante.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{-4}$$

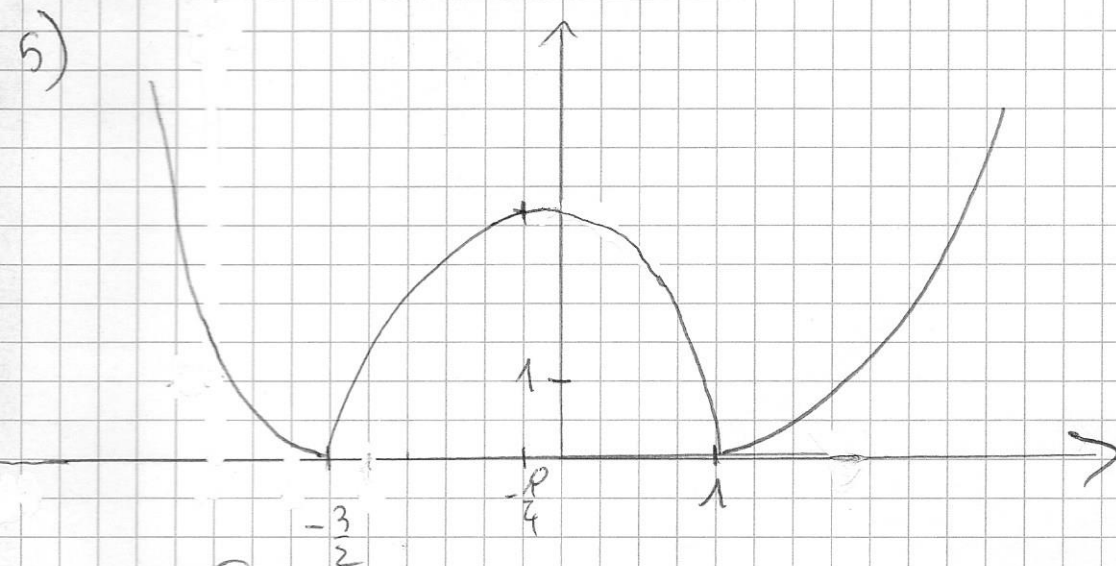
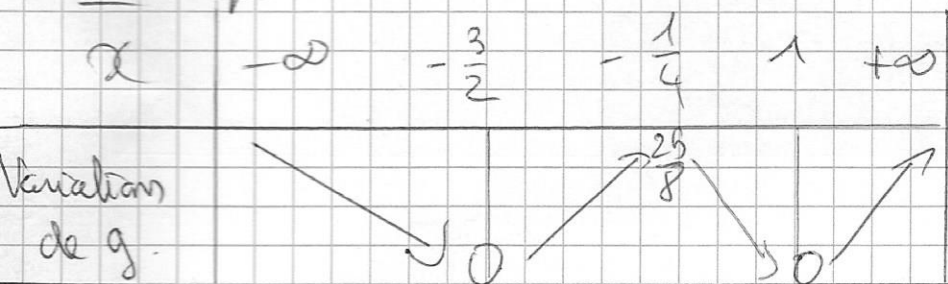
$$\begin{aligned} \text{et } \beta &= g(\alpha) = -2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{24}{8} \\ &= \frac{25}{8} \end{aligned}$$

Remarque: Sur $]-\frac{3}{2}; 1[$, $g(x) = -u(x)$ et en $x = -\frac{1}{4}$,

u atteignait son minimum $-\frac{25}{8}$ et g atteignait son maximum égal à $-(-\frac{25}{8}) = \frac{25}{8}$.

Par conséquent:

(3)



Exercice (3):

1) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x-2}$

$\sqrt{3x+1}$ est définie si et seulement si $3x+1 \geq 0$

$\sqrt{x-2}$ est définie si et seulement si $x-2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ est définie si et seulement si $x > 2$

Finalement: f est définie si et seulement si $x > 2$

$D_f =]2; +\infty[$

2) $g(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-2}}$

g est définie si et seulement si $\frac{3x+1}{x-2} \geq 0$

Tableau de signes:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
signe de $3x+1$	-	0	+	+
signe de $x-2$	-	-	0	+
signe de $\frac{3x+1}{x-2}$	+	0	-	+

Donc $D_g =]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup]2; +\infty[$

3) Comme $D_f \neq D_g$, f ne peut pas être égale à g .

$$a \in [2; +\infty[, b \in [2; +\infty[, c \in [-3; 5] , a < b$$

$$1) 2 \leq a < b \text{ d'où } a-2 < b-2$$

$$\sqrt{a-2} < \sqrt{b-2} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$2) -3 \leq c \leq 5 \text{ d'où } 0 \leq c^2 \leq 25$$

(résolution graphique d'inéquation à partir de la fonction carré).

$$a \geq 2 \text{ d'où } 0 \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$$

Donc

$$0 \leq c^2 + \frac{1}{a} \leq 25 + \frac{1}{2} = \frac{51}{2}$$

Exercice (5)

$$1) \text{ D'après l'énoncé, } 0 \leq x \leq 4 \text{ donc } D = [0; 4]$$

$$2) \text{ Soit } x \in D:$$

$$f(x) = \text{Aire}(ONMP) = ON \times MN = x \times MN.$$

Dans le triangle OMN, rectangle en N, on utilise le théorème de Pythagore:

$$OM^2 = ON^2 + MN^2 \Leftrightarrow 4^2 = x^2 + MN^2$$

$$\Leftrightarrow MN^2 = 16 - x^2$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{16 - x^2}$$

Par conséquent:

$$f(x) = x \sqrt{16 - x^2}, \text{ pour tout } x \in D.$$

$$3) a) \text{ Soit } x \in D,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sqrt{16 - x^2} \\ &= \sqrt{x^2 (16 - x^2)} \\ &= \sqrt{16x^2 - x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } 64 - (x^2 - 8)^2 &= 64 - (x^4 - 16x^2 + 64) \\ &= 16x^2 - x^4 + 64 - 64 \\ &= 16x^2 - x^4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } f(x) = \sqrt{64 - (x^2 - 8)^2}, \text{ pour tout } x \in D.$$

$$b) \text{ Soit } x \in D, (x^2 - 8)^2 \geq 0 \text{ d'où } 0 \leq 64 - (x^2 - 8)^2 \leq 64$$

$$\sqrt{64 - (x^2 - 8)^2} \leq \sqrt{64} \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$\text{Donc: } f(x) \leq 8, \text{ pour tout } x \in D.$$

c) $f(x) = 8 \Leftrightarrow \sqrt{64 - (x^2 - 8)^2} = 8$

$\Leftrightarrow 64 - (x^2 - 8)^2 = 64$

$-(x^2 - 8)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 8)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 8$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{8} \text{ ou } -\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \text{ ou } -2\sqrt{2}$

$S = \{2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\} \text{ or, } x \in \mathbb{D}, \text{ donc } \boxed{x = 2\sqrt{2}}$

d) $\text{Aire}(ONMP) = f(x) \leq 8$

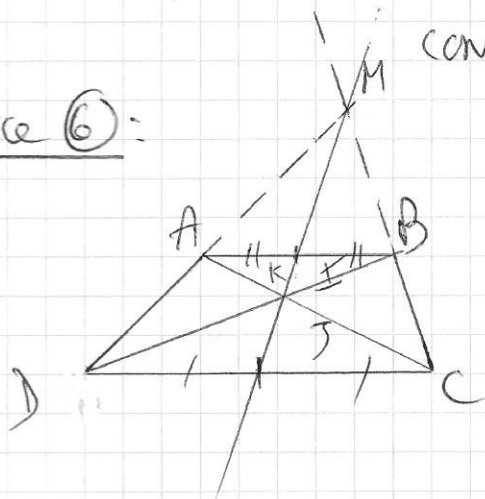
Donc $f(x) = 8$: Aire maximale

D'après c), $f(x) = 8$ pour $x = 2\sqrt{2} = OM$

et $MN = \sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

D'où $MM = OM$ Donc $ONMP$ est un rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux donc $ONMP$ est un carré

Exercice 6:



1) $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires (sinon ABCD ne serait pas un trapèze)

D'où $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$ est un repère du plan

2) $A(0; 0)$ $B(1; 0)$ car $\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AD}$

$\vec{AD} = 0\vec{AB} + 1\vec{AD}$ d'où $D(0; 1)$

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$

D'où $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

3) $c(a; y_c)$, $a \in x_c$, $a \neq 1$

$AB(1; 0)$

$DC(x_c - x_D; y_c - y_D)$

$(a - 0; y_c - 1)$

Or, $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont colinéaires. D'où: $x_{\vec{AB}} \times y_{\vec{DC}} = x_{\vec{DC}} \times y_{\vec{AB}}$

c'est-à-dire: $y_c - 1 = 0 \times (a - 0) = 0$ Donc $y_c = 1$

Donc: $c(a; 1)$

Test le milieu de $[CD]$: $x_J = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \quad \left| \quad y_J = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \right. \quad (6)$

Donc: $J\left(\frac{a}{2}; 1\right)$

4) Droite (BC):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} (x_C - x_B; y_C - y_B) & \left\{ \begin{array}{l} \text{or, } \overrightarrow{BC} \text{ vecteur directeur de (BC).} \\ \text{D'ail (BC): } x + (1-a)y + c = 0 \\ \text{or, } B \in (BC): \end{array} \right. \\ (a-1; 1-0) & \\ (a-1; 1) & \end{aligned}$$

$$1 + (1-a) \times 0 + c = 0$$

$$\text{d'ail } c = -1$$

Donc: (BC): $x + (1-a)y - 1 = 0$

Droite (AD):

$\overrightarrow{AD} (0; 1)$ vecteur directeur de la droite (AD)

D'ail: (AD): $x + c = 0$

or, $A(0; 0) \in (AD)$ d'ail $c = 0$

Donc: (AD): $x = 0$

or, $M \in (BC) \cap (AD)$:

d'ail $\begin{cases} x = 0 \\ x + (1-a)y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{1-a} \end{cases}$

Donc $M\left(0; \frac{1}{1-a}\right)$

5) $\overrightarrow{MI}\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{1-a}\right) \quad \overrightarrow{MJ}\left(\frac{a}{2}; 1 - \frac{1}{1-a}\right)$

or, $1 - \frac{1}{1-a} = \frac{1-a-1}{1-a} = -\frac{a}{1-a}$

$a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ et $-\frac{1}{1-a} \times a = -\frac{a}{1-a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{donc: } \overrightarrow{MJ} = a \overrightarrow{MI} \end{array} \right.$

Donc $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont colinéaires avec un point commun $\left\{ \begin{array}{l} \text{donc } \underline{M, I, J} \text{ sont alignés} \end{array} \right.$

6) Droite (BD): $\overrightarrow{BD} (-1; 1)$ vecteur directeur de (BD)

$$(BD): x + y + c = 0$$

(7)

$$\text{or, } B \in (BD), \text{ d'où : } 1 + 0 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -1$$

$$\text{Donc : } (BD): x + y - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AC}(a; 1) \text{ vecteur directeur de } (AC)$$

$$\text{d'où : } (AC): x - ay + c = 0$$

$$\text{or, } A \in (AC) \text{ d'où } 0 - a \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Donc } (AC): x - ay = 0$$

$$\text{or, } \{K\} = (AC) \cap (BD)$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(a+1) = 1 \\ x = ay \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{a+1} \\ x = \frac{a}{a+1} \end{cases}$$

$$7) \text{ Donc : } K \left(\frac{a}{a+1} ; \frac{1}{a+1} \right)$$

$$\overrightarrow{MI} \left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{1-a} \right) \quad \overrightarrow{MK} \left(\frac{a}{a+1} ; \frac{1}{a+1} - \frac{1}{1-a} \right)$$

$$\begin{aligned} x_{\overrightarrow{MI}} \times y_{\overrightarrow{MK}} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a-1+a+1}{(a+1)(a-1)} \right) \\ &= \frac{a}{(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

$$y_{\overrightarrow{MI}} \times x_{\overrightarrow{MK}} = -\frac{1}{1-a} \times \frac{a}{a+1}$$

$$= \frac{1}{a-1} \times \frac{a}{a+1} = \frac{a}{(a-1)(a+1)}$$

Donc : $x_{\overrightarrow{MI}} \times y_{\overrightarrow{MK}} = x_{\overrightarrow{MK}} \times y_{\overrightarrow{MI}}$ Donc $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont colinéaires.
avec un point commun.

Donc : M, I et K sont alignés.

Par conséquent :

M, I, J et K sont alignés