1ère S 4 — Correction du DS commun (Second degré) — (Fait le 26/09/14) (1)

Exercice (1):

1) $f(x) = -x^2+6x-8$

$= -(x^2-6x+8)$

$= -[(x-3)^2-9+8]$

$\boxed{f(x) = -(x-3)^2+1 \quad \text{(Forme canonique de } f\text{)}}$

2) $f(x) > -6 \iff -x^2+6x-8 > -6$

$\iff -x^2+6x-2 > 0 \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac = 36-4\times(-1)\times(-2)$

$= 28 > 0$ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+\sqrt{28}}{-2} = \dfrac{-6+2\sqrt{7}}{-2} = 3-\sqrt{7}$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{28}}{-2} = \dfrac{-6-2\sqrt{7}}{-2} = 3+\sqrt{7}$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a=-1<0$

Tableau de signes:

x	$-\infty$		$3-\sqrt{7}$		$3+\sqrt{7}$		$+\infty$
Signe de $-x^2+6x-2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]3-\sqrt{7}\,;\,3+\sqrt{7}[$

3) x abscisse d'un point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

$\iff f(x) = g(x)$

$\iff -x^2+6x-8 = -(x+3)(x-1)$

$\iff -x^2+6x-8 = -x^2-2x+3$

$\iff 8x = 11$

$\iff x = \dfrac{11}{8}$

Il n'y a qu'un seul point d'intersection entre les 2 paraboles. Il a pour coordonnées $\left(\dfrac{11}{8}\,;y\right)$ avec $y = f\left(\dfrac{11}{8}\right) = -\left(\dfrac{11}{8}\right)^2+6\times\dfrac{11}{8}-8$

$= -\dfrac{121}{64}+\dfrac{66}{8}-8 = -\dfrac{105}{64}$

4) a) $f(x) = -x^2+6x-8 \qquad g(x) = -(x+3)(x-1)$

$= -(x^2+2x-3)$

$= -x^2-2x+3$

* Les coefficients a sont égaux à -1 tous les 2.
$a<0$ donc les 2 paraboles sont orientées vers le bas (P et R)

* Calcul de l'abscisse du sommet de la parabole représentant f :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Donc la parabole représentant f est la R et donc celle représentant g est la P.

b) Parabole Q :

On a $h(x) = a(x+1)^2 - 4$ Forme canonique de h
car le sommet de la parabole Q a pour coordonnées $(-1;-4)$

Par lecture graphique, $h(0) = -3$

D'où $a \times (0+1)^2 - 4 = -3 \iff a - 4 = -3$
$\iff a = 1$

D'où $h(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$

Exercice 2 :

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases}$

1) A = sommet de la parabole C_f

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = f(3) = 9 - 18 + 5$
$= -4$

Donc : $A(3;-4)$

2) B et C sont les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses
$B(x_B; y_B)$ $C(x_C; y_C)$ x_B et x_C sont les deux antécédents de 0 par f

Résolvons $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \iff x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 20 = 16 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+4}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-4}{2} = 1$

Comme $1 < 5$, $x_B = 1$ et $x_C = 5$
On sait que B et C sont sur l'axe des abscisses, d'où $y_B = y_C = 0$

Donc : $B(1;0)$ et $C(5;0)$

D point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées

$x_D = 0$. $y_D = f(x_D) = f(0) = 0^2 - 6\times 0 + 5$
$= 5$

Donc $\underline{D(0;5)}$

On a : $y_E = y_D$ d'où $y_E = 5$

$\Leftrightarrow x_E^2 - 6x_E + 5 = 5$

$\Leftrightarrow x_E^2 - 6x_E = 0$

$\Leftrightarrow x_E(x_E - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x_E = 6$ (car $x_E \neq 0$)

Donc $\underline{E(6;5)}$

Exercice 3 : $AM = x$

1) Comme $AB = 3$ et $M \in [AB]$ avec $AM = x$, donc $\underline{x \in [0;3]}$

2) $\mathcal{A}(x) = \text{Aire}(ABCD) - (2\times \text{Aire}(AMQ) + 2\times \text{Aire}(BMN))$

$= 5\times 3 - 2\left(\frac{x\times(5-x)}{2} + \frac{x(3-x)}{2}\right)$

$= 15 - 5x + x^2 - 3x + x^2$

Donc $\underline{\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15}$

3) a) $\begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ c = 15 \end{cases}$ >0 d'où $\mathcal{A}$ est d'abord décroissante, puis croissante

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad \beta = \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(2)$

$= 2\times 2^2 - 8\times 2 + 15$

$= 8 - 16 + 15$

$= 7$

D'où le tableau de variation de $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}(3) = 18 - 24 + 15$
$= 9$

x	0		2		3
Variation de $\mathcal{A}$	15	$\searrow$	7	$\nearrow$	9

b) $\mathcal{A}$ atteint son minimum en $x = 2$ et vaut 7

Donc l'aire minimale de MNPQ $= 7\,cm^2$

4) a) $\mathcal{A}(x) = 9 \iff 2x^2 - 8x + 15 = 9$

$\iff 2x^2 - 8x + 6 = 0$

$\iff x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 3$

$= 4 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-2}{2} = 1$

Donc $S = \{3 ; 1\}$

b) On peut placer M à 1 cm de A ou à 3 cm de A pour que MNPQ ait une aire de $9 cm^2$.

Exercice 4 :

$f(x) = x^2 + (m-3)x + 5$

1) 2 est racine de $f \iff 2^2 + (m-3) \times 2 + 5 = 0$

$\iff 4 + 2m - 6 + 5 = 0$

$\iff 2m = -3$

$\iff m = -\dfrac{3}{2}$

2) f admet 2 racines distinctes $\iff \Delta > 0$

$\iff (m-3)^2 - 20 > 0$

$\iff (m - 3 - \sqrt{20})(m - 3 + \sqrt{20}) > 0$

$\iff (m - 3 - 2\sqrt{5})(m - 3 + 2\sqrt{5}) > 0$

m	$-\infty$		$3-2\sqrt{5}$		$3+2\sqrt{5}$		$+\infty$
$m-3-2\sqrt{5}$		$-$		$-$	0	$+$	
$m-3+2\sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors : $m \in]-\infty ; 3-2\sqrt{5}[\cup]3+2\sqrt{5} ; +\infty[$

$\boxed{\text{BONUS}}$: $x_1 \times x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1}{4a^2}\left[(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2\right] = \dfrac{1}{4a^2}\left[\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac\right]$

$= \dfrac{4ac}{4a^2} = \boxed{\dfrac{c}{a}}$