

Enoncé1) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Corrigé :

* Initialisation : Pour $n=2$: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

et $\frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$ d'où : $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2+1}{2 \times 2}$ (la prop. est initialisée)

* Hérédité : On suppose la prop. vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$ (c'est-à-dire :

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

On va la montrer au rang $k+1$:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2k} \times \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \times \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{k+1}{2k} \times \frac{(k+1-1)(k+1+1)}{(k+1)^2} = \frac{k+1}{2k} \times \frac{k \times (k+2)}{(k+1)^2} = \frac{(k+1) \times (k+2)}{2(k+1)^2} = \frac{(k+2)}{2(k+1)}$$

La prop. est héréditaire

* Conclusion : La prop. est initialisée et héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [2; +\infty[$.

Enoncé :2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \neq 0$,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Corrigé

* Initialisation : Pour $n=1$ $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$

$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$, d'où $\sum_{k=1}^1 k^3 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4}$ (prop. initialisée)

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain rang $p \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^p k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$

On va alors la montrer au rang $p+1$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^3 = \sum_{k=1}^p k^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2 \times (p+1)^2}{4} + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \left(\frac{p^2}{4} + p+1 \right) = (p+1)^2 \left(\frac{p^2 + 4p + 4}{4} \right) = \frac{(p+1)^2 (p+2)^2}{4}$$

* Conclusion : La prop. est initialisée et héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Enoncé :

On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \\ v_0 = 2 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq v_n \leq 6$$

Corrigé :

* Initialisation: $v_0 = 2$ et $0 \leq 2 \leq 6$
d'où $0 \leq v_0 \leq 6$

* Hérédité: On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire: $0 \leq v_k \leq 6$). On va alors la montrer au rang $k+1$: $0 \leq v_{k+1} \leq 6$, d'où $0 \leq \frac{1}{2}v_k \leq 3$, donc: $0 \leq 3 \leq \frac{1}{2}v_k + 3 \leq 6$

* Conclusion: La prop. est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

prop. héréditaire $= v_{k+1}$

Enoncé :

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

En calculant les premiers termes, conjecturer la formule explicite de u_n . Montrer cette formule par récurrence.

Corrigé :

$$u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} \quad u_2 = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$u_3 = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3 \times 4}} = \frac{1}{\sqrt{4+1}}$$

Formule explicite: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Par récurrence:

* Initialisation: $u_0 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{0+1}} = \frac{1}{1} = 1$
d'où $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$ La prop. est initialisée

* Hérédité: On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (càd: $u_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$). Montrons qu'elle est alors vraie au rang $k+1$.

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{\sqrt{u_k^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\frac{1}{k+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} \left(\sqrt{\frac{1+k+1}{k+1}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{k+1} \times \sqrt{k+2}} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)+1}}$$

* Conclusion: La prop. est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La prop. est initialisée

