T4S	**Correction du contrôle de géométrie dans l'espace et calcul vectoriel**	Rendu le 11/04/2020

Exercice 1 : $A(2;1;-3)$ $B(-5;4;1)$ $C(-1;-2;3)$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-7\\3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

Soit $M(x;y;z)\in(AB)$:

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$ $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires :

$\vec{AM}=t\vec{AB}$ $t\in\mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases}x-2=-7t\\y-1=3t\\z+3=4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases}x=2-7t\\y=1+3t\\z=-3+4t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-7\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-3\\6\end{pmatrix}$

$-1\times y_{\vec{AB}}=-1\times3=-3=y_{\vec{AC}}$

mais $-1\times x_{\vec{AB}}=-1\times(-7)=7\neq-3=x_{\vec{AC}}$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

autrement dit : A, B et C déterminent un plan

3) $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC)

Soit $M(x;y;z)\in(ABC)$:

$\vec{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$ $\vec{AM}=t\vec{AB}+s\vec{AC}$, avec t et s réels

D'où :

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t \\ 3t \\ 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3s \\ -3s \\ 6s \end{pmatrix}, \ t, s, \text{ réels}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-2 = -7t-3s \\ y-1 = 3t-3s \\ z+3 = 4t+6s \end{cases}, \ t, s \text{ réels}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2-7t-3s \\ y = 1+3t-3s \\ z = -3+4t+6s \end{cases}, \ (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 2 : $F(7;-3;2)$ $G(13;-7;4)$

Soit I, le milieu de $[FG]$:

$$I\left(\frac{7+13}{2}; \frac{-3+(-7)}{2}; \frac{2+4}{2}\right) \qquad \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(10;-5;3)$

(P_1) : plan médiateur de $[FG]$

$\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal à (P_1)

Soit $M(x;y;z) \in (P_1) \Longleftrightarrow \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{FG}$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x-10)\times 6 + (y+5)\times(-4) + (z-3)\times 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 6x-4y+2z-60-20-6=0$$

$$\Longleftrightarrow 6x-4y+2z-86=0$$

$$\Longleftrightarrow 3x-2y+z-43=0$$

Equation cartésienne de (P_1)

2) (P_2) : $3x-2y+z-57=0$

a) $3\times x_G - 2\times y_G + z_G - 57 = 3\times 13 - 2\times(-7) + 4 - 57$

$= 39+14+4-57$

$= 57-57 = 0$, donc $G \in (P_2)$

b) $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}$ or, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P_2)

avec $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{n}$ colinéaires

D'autre part, d'après 2a) $G \in (P_2)$

Donc : G est le projeté orthogonal de F sur (P_2)

Exercice 3 :

$(P) : 4x - 2y + 5z - 1 = 0$

$(P') : -5x + 2y - 3z + 2 = 0$

1) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P)

$\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-5\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (P')

$\left.\begin{array}{l} -1 \times y_{\overrightarrow{n}} = -1 \times (-2) = 2 = y_{\overrightarrow{n'}} \\ \text{mais : } -1 \times x_{\overrightarrow{n}} = -1 \times 4 = -4 \neq -5 = x_{\overrightarrow{n'}} \end{array}\right\}$ d'où $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires

D'où (P) et (P') sont sécants

2) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d) intersection des plans (P) et (P') :

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5z - 1 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -5x + 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = -1 \\ -5x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ -5(2z+1) + 2y = 3z - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ 2y = 13z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = \frac{13}{2}z + \frac{3}{2} \end{cases}$$

On pose $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$

On a : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = \frac{13}{2}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Représentation paramétrique de (d)

Exercice 4 : $L(1;2;-3)$ $R(5;3;\frac{5}{2})$ $S(0;7;-7)$

$\overrightarrow{LR}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{LS}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$-4 \times x_{\overrightarrow{LS}} = -4 \times (-1) = 4 = x_{\overrightarrow{LR}}$

mais, $-4 \times y_{\overrightarrow{LS}} = -4 \times 5 = -20 \neq y_{\overrightarrow{LR}}$

1) $\vec{n}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{LR} = -3 \times 4 + 1 \times 1 + 2 \times \frac{11}{2}$

$= -12 + 1 + 11 = 0$

et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{LS} = -3 \times (-1) + 1 \times 5 + 2 \times (-4)$

$= 3 + 5 - 8 = 0$

comme $\overrightarrow{LR}$ et $\overrightarrow{LS}$ sont deux vecteurs non-colinéaires du plan (LRS)

alors $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (LRS)

2) $L \in (LRS)$ et $\vec{n}$ normal à (LRS)

Soit $M(x;y;z) \in (LRS) \iff \overrightarrow{LM} \cdot \vec{n} = 0$

$\iff (x-1) \times (-3) + (y-2) \times 1 + (z+3) \times 2 = 0$

$\iff -3x + y + 2z + 3 - 2 + 6 = 0$

$\iff -3x + y + 2z + 7 = 0$

Equation cartésienne du plan (LRS)