T4S	**Lois de probabilité à densité**	Année scolaire 2019/2020

I) Variable aléatoire à densité :

Dans cette partie, on considère une expérience aléatoire et l'univers Ω *associé, muni d'une probabilité*

Jusqu'à présent, nous n'avons travaillé qu'avec des variables aléatoires discrètes (= qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs). Exemple : Si X suit B(56 ;0,4), elle ne prend que les valeurs entières comprises entre 0 et 56.

Il est possible, dans de nombreux domaines, d'étudier des variables aléatoires qui vont prendre (du moins théoriquement) toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exemples :

Durée de vie d'un composant électronique, temps d'attente chez un médecin, etc…

1) Variable aléatoire continue :

a) Définition :
Une variable aléatoire X est dite **continue (ou à densité)** si à chaque issue de Ω, elle associe un nombre réel d'un intervalle I contenu dans $\mathbb{R}$

Exemple : La durée de vie d'un composant électronique peut se mesurer en jours, mois, années, etc…

2) Loi de probabilité à densité :

a) Définition :

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On considère une fonction f, **continue et positive sur I** et telle que :

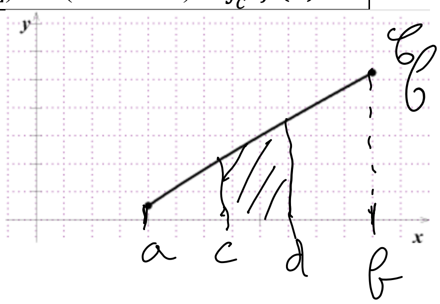
$\int_a^b f(x)dx = 1$, si I = [a ;b] (autrement dit : *l'aire sous la courbe de f vaut 1 sur I*)

Ou $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(x)dx = 1$ si I =[a ;+∞[

On dit alors que **f est une densité de probabilité sur I .**

Pour tout intervalle [c ;d] contenu dans I :

$$\boxed{P(X \in [c\,;d]) = P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx}$$



Exemples :

Soit f(x) = $\frac{1}{x}$ sur [1 ;e].

Montrer que f est une densité de probabilité sur [1 ;e]

f est continue et positive sur [1 ;e]

Comme f est continue, f est intégrable sur [1 ;e]

$\int_1^e f(x)dx$ = ln e – ln 1 = 1. Par conséquent : **f est bien une densité de probabilité sur [1 ;e]**

Si on note X la variable aléatoire associée la densité f ,

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln 2$$

b) Propriétés :

- Soit c ϵ I, alors P(X = c) = 0

Démonstration :

P(X=c) = $\int_c^c f(x)dx = 0$

- Conséquences :
  Pour c et d ϵ I, on a :

  $$\boxed{P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d)}$$

  Autrement dit : Pour une loi continue, on peut remplacer une inégalité large par une inégalité stricte et vice-versa.

- P(X > c) = 1 – P(X ≤ c) = 1 – P(X < c) et P(c ≤ X ≤ d) = P(X ≤ d) – P(X ≤ c)

3) Espérance mathématique :

On va étendre la définition de l’espérance mathématique étudiée avec les variables discrètes aux variables continues.

Rappel : E(X) = $\sum_{k=1}^{n} x_k pk$, pour une variable aléatoire X suivant une loi discrète.

On considère X, une variable aléatoire continue de densité f sur [a ;b]. Alors on définit l’espérance mathématique de X notée E(X), le nombre :

$$\boxed{E(X) = \int_a^b xf(x)dx}$$

Exemple :

On reprend l’exemple précédent : E(X) = $\int_1^e x \times \frac{1}{x}\, dx = \int_1^e 1dx$ = **e – 1**

II) **Loi uniforme sur [a ;b] :**

1) Définition :

On considère deux réels a et b tels que a < b.

On dit qu'une variable aléatoire **X suit la loi uniforme sur [a ;b]**, si sa densité est une fonction constante sur [a ;b]

2) Densité :

En fait, si X suit la loi uniforme sur [a ;b], alors sa densité f est définie sur [a ;b] par f(x) = $\frac{1}{b-a}$

Démonstration :

f est une fonction constante sur [a ;b] d'après la définition du 1)

Notons f(x) = c $\in \mathbb{R}$, pour tout x $\in$ [a ;b]

Or, $\int_a^b f(x)dx = 1$, d'où : $\int_a^b cdx$ = c$\int_a^b 1dx$ = c×(b – a) = 1, donc c = $\frac{1}{b-a}$

C'est-à-dire : f(x) = $\frac{1}{b-a}$, pour tout x $\in$ [a ;b]

3) Calcul de probabilités :

Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur [a ;b].

Soient c et d deux réels, appartenant à [a ;b], alors :

$$P(c \leq X \leq d) = \boxed{\frac{d - c}{b - a}}$$

Démonstration :

$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_c^d 1dx = \frac{d-c}{b-a}$

4) Espérance mathématique :

Soit X, une variable aléatoire continue qui suit la loi uniforme sur [a ;b].

Alors :

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Démonstration :

$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{\cancel{b-a}} \times \frac{(b+a)\cancel{(b-a)}}{2} = \frac{a+b}{2}$

III) Loi exponentielle :

1) Définition :

On considère un nombre réel λ strictement positif.

On dit qu'une variable aléatoire **X suit la loi exponentielle de paramètre λ**, si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur [0 ;+∞[, par :

$$\boxed{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$$

2) Calculs de probabilités :

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors, pour tous a, b ϵ ℝ,

$$P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a} \qquad P(X > a) = e^{-\lambda a}$$
$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Démonstrations :

$P(X \leq a) = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} + e^0 = 1 - e^{-\lambda a}$

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$

$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Durée de vie sans vieillissement :

La loi exponentielle est dite « sans mémoire ».

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle, alors pour tous les réels positifs x et h :

$$\boxed{P_{X \geq x}(X \geq x + h) = P(X \geq h)}$$

Démonstration :

Posons A : « $X \geq x + h$ » et B : « $X \geq x$ ». On a : $A \subset B$, d'où $A \cap B = A$

$P_{(X \geq x)}(X \geq x + h) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(X \geq x + h)}{P(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+h)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda h}$

$= P(X \geq h)$

3) Espérance mathématique :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ > 0.

Alors son espérance mathématique est donnée par :

$$\boxed{E(X) = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x f(x)dx = \frac{1}{\lambda}}$$

Démonstration :

Posons $g(x) = x f(x)$, sur $[0;+\infty[$

$$g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$$

On va chercher une primitive de G de g sur $[0;+\infty[$ sous la forme :

$$G(x) = (ax+b)e^{-\lambda x}$$, où a et b sont deux réels à déterminer.

G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et :

posons $u(x) = ax+b \qquad v(x) = e^{-\lambda x}$

$u'(x) = a \qquad v'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

$$G'(x) = a e^{-\lambda x} - \lambda(ax+b)e^{-\lambda x}$$

$$= (-\lambda ax + a - \lambda b)e^{-\lambda x}$$

Comme G est une primitive de g,

$$G'(x) = g(x)$$

d'où : $(-\lambda ax + a - \lambda b)e^{-\lambda x} = \lambda x e^{-\lambda x}$

Par identification : $\begin{cases} -a = 1 \\ a - \lambda b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ -\lambda b = -a \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ -\lambda b = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$

soit $c \in [0;+\infty[$:

$$\int_0^c g(x)\,dx = \int_0^c x f(x)\,dx = \left[\left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^c$$

$$= \left(-c - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda c} + \frac{1}{\lambda}$$

$\lim\limits_{c \to +\infty} e^{-\lambda c} = ?$ $\qquad$ $\lambda > 0$: $\lim\limits_{c \to +\infty} -\lambda c = -\infty$

Or, $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ Par composée : $\lim\limits_{c \to +\infty} e^{-\lambda c} = 0$

$\lim\limits_{c \to +\infty} -\lambda c = -\infty$

$-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda c} \xrightarrow[c \to +\infty]{} 0$ (par produit)

$-c \xrightarrow[c \to +\infty]{} -\infty$

et $e^{-\lambda c} \xrightarrow[c \to +\infty]{} 0$

Forme indéterminée du type " $\infty \times 0$ "

or, $\lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$

$-c e^{-\lambda c} = \frac{1}{\lambda} \times (-\lambda c) e^{-\lambda c}$

On pose : $X = -\lambda c \xrightarrow[c \to +\infty]{} -\infty$

Par composée :

$\lim\limits_{c \to +\infty} -\lambda c e^{-\lambda c} = 0$

Donc $\lim\limits_{c \to +\infty} \int_0^c g(x)\,dx = \frac{1}{\lambda} = E(X)$