T4S	**Corrigé du DEFI de limite**	Année scolaire 2019/2020

On souhaite calculer : $\lim\limits_{x\to2} \frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6}$

1) Montrer qu'on est face à une forme indéterminée.

$\lim\limits_{x\to2} 15x^3-34x^2+5x+6 = 15\times2^3-34\times2^2+5\times2+6 = 15\times8-34\times4+16$

$= \cancel{120}-\cancel{136}+\cancel{16}$

$=0$ } Forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ »

de même : $\lim\limits_{x\to2} 5x^2-13x+6 = 5\times4-13\times2+6$

$= \cancel{20}-\cancel{26}+\cancel{6}=0$

2) Factoriser le dénominateur

$5x^2-13x+6 \begin{cases} a=5 \\ b=-13 \\ c=6 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$=(-13)^2-4\times5\times6$

$=169-120=49>0$

Le trinôme admet 2 racines distinctes :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+7}{10}=2$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-7}{10}=\frac{6}{10}=\frac{\cancel{2}\times3}{\cancel{2}\times5}=\frac{3}{5}$

Or, ax^2+bx+c se factorise sous la forme : $a(x-x_1)(x-x_2)$

d'où $5x^2-13x+6=5(x-2)\left(x-\frac{3}{5}\right)$

3) a) Calculer les nombres a, b et c tels que $15x^3 - 34x^2 + 5x + 6 = (5x - 3)(ax^2 + bx + c)$

$(5x-3)(ax^2+bx+c) = 5ax^3 + 5bx^2+5cx-3ax^2-3bx-3c$

$= 5ax^3+x^2(5b-3a)+x(5c-3b)-3c$

On identifie les coefficients de même degré :

$\begin{cases} 5a=5 \\ 5b-3=-34 \\ 5c-3=5 \\ -3c=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ 5b=3\times3-34=-25 \\ 5c-3b=5 \\ c=-2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ 5c=3\times(-5)+5 \\ c=-2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a=3 \\ b=-5 \\ c=-2 \end{cases}}$

Donc : $15x^3-34x^2+5x+6=(5x-3)(3x^2-5x-2)$

b) Factoriser $3x^2 - 5x - 2$ $\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \\ c = -2 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$
$= 25 + 24 = 49 > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+7}{6} = 2$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$3x^2 - 5x - 2 = 3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

c) En déduire la simplification au maximum de $\frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6}$

$\frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6} = \frac{\cancel{(5x-3)} \times 3\cancel{(x-2)}\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\cancel{5}\cancel{(x-2)}\cancel{\left(x-\frac{3}{5}\right)}}$

$= 3\left(x+\frac{1}{3}\right) = 3x+1$

4) Conclure sur la valeur de : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6}$

On a : $\frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6} = 3x+1$

$\lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 3\times 2+1 = 7$

Donc: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{15x^3-34x^2+5x+6}{5x^2-13x+6} = 7$