T4S	**Corrigé du défi mathématique de vacances n°3**	Année scolaire 2019/2020

Voici trois questions indépendantes :

1) Montrer par récurrence que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$,

$$2^{2n} \geq n^2$$

* Initialisation :

$2^{2\times 1} = 4$ et $1^2 = 1$

d'où $2^{2\times 1} \geqslant 1^2$

la prop est initialisée

* Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$

On va alors la montrer au rang $k+1$:

$$2^{2(k+1)} = 2^{2k} \times 2^2 \geq k^2 \times 4$$

(d'après l'hypothèse de récurrence)

or, $4k^2 = k^2 + k^2 + k^2 + k^2$
$= k^2 + 2k^2 + k^2$
$> k^2 + 2k + 1$

(car $k \geq 1$, d'où $k^2 \geq k$)

d'où :

$$2^{2(k+1)} > \underbrace{k^2 + 2k + 1}_{=(k+1)^2}$$

la propriété est donc héréditaire

* conclusion : La prop est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{5x+2}{x+3}}$

$f(x) = \sqrt{\frac{5x+2}{x+3}} = g(u(x))$

avec $u(x) = \frac{5x+2}{x+3}$

et $g(x) = \sqrt{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} 5x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} 2 = 2 \end{array}\right\} \text{Par somme : } \lim_{x \to +\infty} 5x+2 = +\infty$$

De même, $\lim_{x \to +\infty} x+3 = +\infty$

Par quotient on a une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{5+\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \frac{5}{1} = 5$

Or, $\lim\limits_{X\to 5} \sqrt{X} = \sqrt{5}$

D'où, par composition, $\underline{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{5}}$

b) Interprétation graphique de

cette limite.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{5}$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{5}$ en $+\infty$

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7^n - 2^n}{7^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 7^n = +\infty$, car $7 > 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, car $2 > 1$

Par différence, on a une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$"

$$\frac{7^n - 2^n}{7^n} = \frac{\cancel{7^n}\left(1 - \frac{2^n}{7^n}\right)}{\cancel{7^n}}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{2}{7} < 1$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7^n - 2^n}{7^n} = 1$