

Question 1):

$$a) F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x + 3$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \quad v(x) = \ln x$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et v dérivable sur $]0; +\infty[$
d'où F est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$u'(x) = x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{or, } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{d'où } F'(x) = x \ln x + \frac{x}{2} = \frac{2x \ln x + x}{2} = \frac{x(2 \ln x + 1)}{2} = f(x)$$

Donc. F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

$$b) I = \int_{e^2}^{e^3} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left[F(x) \right]_{e^2}^{e^3} = F(e^3) - F(e^2) \\ &= \frac{e^6}{2} \ln(e^3) + 3 - \frac{e^4}{2} \ln(e^2) - 3 \\ &= \frac{3}{2} e^6 - e^4 \\ &= \underline{\underline{e^4 \left(\frac{3}{2} e^2 - 1 \right)}} \end{aligned}$$

Question (2):

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{+5}{2} \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

On pose $u(x) = 5x + \frac{\pi}{4}$ $u'(x) = 5$

$$u'(x) \sin u(x) = 5 \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

d'où $f(x) = \frac{3}{2} u'(x) \sin u(x)$

$F(x) = -\frac{3}{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ est une primitive de f $\frac{\pi}{2} \sin \mathbb{R}$

d'où $J = \left[-\frac{3}{2} \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= -\frac{3}{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} \right)$$
$$= -\frac{3}{2} \left[\cancel{\cos\frac{5\pi}{2}} \cancel{\cos\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\sin\frac{5\pi}{2} \sin\frac{\pi}{4}}_{=1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$
$$= -\frac{3}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Donc $J = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}}$

Question (3):

$$I = \int_1^3 \frac{2}{3} x^2 e^{x^3} dx$$

On pose: $u(x) = x^3$ $u'(x) = 3x^2$

$$u'(x) e^{u(x)} = 3x^2 e^{x^3}$$

$$D'_{\text{ou}}: \frac{2}{g} \times 3x^2 e^{x^3} = \frac{2}{3} x^2 e^{x^3}$$

$$\text{Donc: } I = \left[\frac{2}{g} e^{x^3} \right]_1^3$$

$$= \frac{2}{g} (e^{27} - e) \text{ en u.a.}$$

$$\text{or, } 1 \text{ u.a.} = 2 \times 1 = 2 \text{ cm}^2$$

$$d'_{\text{ou}} I = \frac{2}{g} (e^{27} - e) \times 2$$

$$\simeq \underline{\underline{2,36 \times 10^{11} \text{ cm}^2}} \simeq 23,6 \text{ km}^2$$