T4S

Corrigé du bac blanc n° 1 (Fait le 19/01/20)

Exercice 1 : (/5 pts)

1) $u_n = \dfrac{\cos n + 2n}{n+3}$

On a : $-1 \leq \cos n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où $\dfrac{-1+2n}{n+3} \leq \dfrac{\cos n + 2n}{n+3} \leq \dfrac{1+2n}{n+3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n+1 = +\infty = \lim\limits_{n \to +\infty} n+3 = \lim\limits_{n \to +\infty} 2n-1$

D'où par quotient, ce sont des formes indéterminées du type : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

$\dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} = 0$

Par sommes : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1$ } Par quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 2$

de même : $\dfrac{2n+1}{n+3} = \dfrac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

Théorème d'encadrement : (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Donc l'affirmation 1 est fausse.

2) $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f_n(x) = xe^{-nx+1}$

$f_n(x) - x = xe^{-nx+1} - x$
$= x(e^{-nx+1} - 1)$ } comme $x \in [0 ; +\infty[$, $x \geq 0$ et :

$e^{-nx+1} - 1 \geq 0 \iff -nx+1 \geq 0$

(car $e^x \geq 1$, pour tout $x \geq 0$
$\iff e^x - 1 \geq 0$, pour tout $x \geq 0$)

$\iff nx \leq 1$
$\iff x \leq \dfrac{1}{n}$

Autrement dit : $f_n(x) - x \geq 0$, pour $x \in [0 ; \frac{1}{n}]$

c'est-à-dire : $f_n(x) \geq x$, pour tout $x \in [0 ; \frac{1}{n}]$

La courbe représentative de f_n est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$, pour $x \in [0 ; \frac{1}{n}]$

Donc l'affirmation 2 est vraie

3) $f(x) = 3\sqrt{5-2x}$ sur $]-\infty ; \frac{5}{2}]$ $\mathcal{C}_f$: courbe de f.

Soit $u(x) = 5 - 2x$, $u(x) = 0 \iff 5 - 2x = 0 \iff x = \frac{5}{2}$

$\sqrt{u}$ est dérivable partout où $u > 0$, c'est-à-dire sur $]-\infty ; \frac{5}{2}[$

$u'(x) = -2$ et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

D'où $f'(x) = 3 \times \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{-3}{\sqrt{5-2x}}$

On a : (T_2) : tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2

$$(T_2) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$f'(2) = \frac{-3}{\sqrt{5-4}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$ $\quad f(2) = 3\sqrt{5-4} = 3 \times 1 = 3$

d'où $(T_2) : y = -3(x-2) + 3 \iff y = -3x + 9$

or, $-3 \times x_A + 9 = -3 \times 3 + 9 = 0 = y_A$

donc : $A \in (T_2)$

L'affirmation 3 est vraie

4) $g(x) = \frac{e^{2x} + e^{x}}{e^{2x} + 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} + e^{x} = +\infty$

de même : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} + 1 = +\infty$

Par quotient : Forme indéterminée du type : « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$$\frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+1}=\frac{\cancel{e^{2x}}(1+e^{-x})}{\cancel{e^{2x}}(1+e^{-2x})}$$, or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \underset{(X=-x)}{=} \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}=0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{\substack{X\to-\infty \\ (X=-2x)}} e^{X} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-2x}=1$ } Par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-2x}}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+e^{x}}{e^{2x}+1}=1$

c'est-à-dire : la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

L'affirmation 4 est donc fausse.

5) $p=0,13$ $n=93$

[redacted]

On a : $I=\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où a = le plus petit entier naturel tel que : $P(X\leq a)>0,025$
et b : le plus petit entier naturel tel que : $P(X\leq b)\geq 0,975$

On détermine a et b à l'aide de la calculatrice.
$a=6$ et $b=19$.

d'où $I=\left[\frac{6}{93};\frac{19}{93}\right]$, or $f=\frac{17}{93}\in I$

Donc, au seuil de 95 %, la fréquence observée est en accord avec la proportion de gauchers au niveau national.

Donc : l'affirmation 5 est fausse.

Exercice 2 :

Partie A :

$g(x) = -2x^3 + 9x^2 - 10x + 4$, sur $[0 ; +\infty[$

$g(0) = -2\times 0^3 + 9\times 0^2 - 10\times 0 + 4 = \underline{4}$

g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, car c'est une fonction polynôme

$g'(x) = -6x^2 + 18x - 10$

signe de $g'(x)$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4\times(-6)\times(-10)$

$= 84 > 0$: d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18+\sqrt{84}}{-12} = \frac{-18+2\sqrt{21}}{-12}$$

$$= \frac{-9+\sqrt{21}}{-6} = \frac{9-\sqrt{21}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9+\sqrt{21}}{6}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

Or, $a = -6 < 0$, d'où $\boxed{g'(x) \leq 0, \text{ sur } \left[0 ; \frac{9-\sqrt{21}}{6}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{21}}{6} ; +\infty\right[\text{ et } g'(x) > 0, \text{ sur } \left]\frac{9-\sqrt{21}}{6} ; \frac{9+\sqrt{21}}{6}\right[}$

D'où : g est croissante sur $\left[\frac{9-\sqrt{21}}{6} ; \frac{9+\sqrt{21}}{6}\right]$

et décroissante sur $\left[0 ; \frac{9-\sqrt{21}}{6}\right] \cup \left[\frac{9+\sqrt{21}}{6} ; +\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, d'où, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} 9x^2 = +\infty$

On a une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$"

$$-2x^3 + 9x^2 - 10x + 4 = x^3\left(-2 + \frac{9}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{10}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^3} = 0$

D'où, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 + \frac{9}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{4}{x^3} = -2$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g\left(\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right) \simeq 0,7$ et $g\left(\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right) \simeq 4,3$

2) a) D'après les variations de g, le minimum de g sur $\left[0; \frac{9+\sqrt{21}}{6}\right]$ est $g\left(\frac{9-\sqrt{21}}{6}\right) \simeq 0,7$.

Sur $\left[\frac{9+\sqrt{21}}{6}; +\infty\right[$:

* g est continue, car c'est une fonction polynôme
* g est strictement décroissante
* comme $g\left(\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right) \simeq 4,3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$,

$$0 \in \left]\lim_{x \to +\infty} g(x) ; g\left(\frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)\right]$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$, admet une unique solution dans $\left[\frac{9+\sqrt{21}}{6}; +\infty\right[$

et comme elle n'en a pas dans $\left[0; \frac{9+\sqrt{21}}{6}\right]$,

$g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$

b) A l'aide de la calculatrice :

$3,09 < \alpha < 3,10$

3) D'après les variations et la question 2 b)

$g(x) \geq 0$ pour $x \in [0; \alpha]$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$

Partie B

Sur $[0;+\infty[$: $A(x) = -x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x$

1) A étant dérivable sur $[0;+\infty[$,

$$A'(x) = -4x^3 + 18x^2 - 20x + 8$$
$$= 2\times(-2x^3 + 9x^2 - 10x + 4)$$
$$= 2\times g(x)$$

Or, $2>0$, d'où A'(x) a le même signe que g(x), pour tout $x \geq 0$

2) Dans la question 3) partie A, on a vu que $g(x) \geq 0$ pour $x \in [0;\alpha]$
et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha;+\infty[$

Autrement dit :
$A'(x) \geq 0$ sur $[0;\alpha]$
et $A'(x) < 0$ sur $]\alpha;+\infty[$

c'est-à-dire : A est croissante sur $[0;\alpha]$
et décroissante sur $]\alpha;+\infty[$

Partie C :

sur $[0;+\infty[$, $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 8$ $(\mathcal{C})$ sa courbe

Soit $x \in [0;4]$, alors $f(x) \geq 0$

$M(x;f(x))$ $P(x;0)$ $Q(0;f(x))$

1) Aire $(OPMQ) = OP \times MQ$

Or, comme le repère est orthonormé : $OP = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2}$
$= \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} = x$

$$PM = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - 0)^2} = f(x)$$

Aire (OPMQ) $= x \times f(x)$

$$= -x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x = A(x)$$

Or, d'après les variations de A (partie B, question 2))

A atteint son maximum en $x = \alpha$

Donc Aire (OPMQ) est maximale pour $x = \alpha$

c'est-à-dire quand M est d'abscisse x

2) Soit $M(\alpha\,;\, f(\alpha))$

T : tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$

$\overrightarrow{PQ}\,(x_Q - x_P\,;\, y_Q - y_P)$

$(0 - \alpha\,;\, f(\alpha) - 0)$

$(-\alpha\,;\, f(\alpha))$

T admet pour vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;\, f'(\alpha))$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -3x^2 + 12x - 10 \\ f'(\alpha) = -3\alpha^2 + 12\alpha - 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\alpha \times x_{\vec{u}} = -\alpha \times 1 = -\alpha = x_{\overrightarrow{PQ}} \\ -\alpha \times f'(\alpha) = +3\alpha^3 - 12\alpha^2 + 10\alpha \end{array}$$

or, $f(\alpha) = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 10\alpha + 8$

on a $-\alpha f'(\alpha) = f(\alpha) \iff 3\alpha^3 - 12\alpha^2 + 10\alpha = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 10\alpha + 8$

$$\iff 0 = -4\alpha^3 + 18\alpha^2 - 20\alpha + 8$$

$$\iff 0 = +2\underbrace{(-2\alpha^3 + 9\alpha^2 - 10\alpha + 4)}_{= g(\alpha)}$$

donc : $\overrightarrow{PQ}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

Par conséquent :

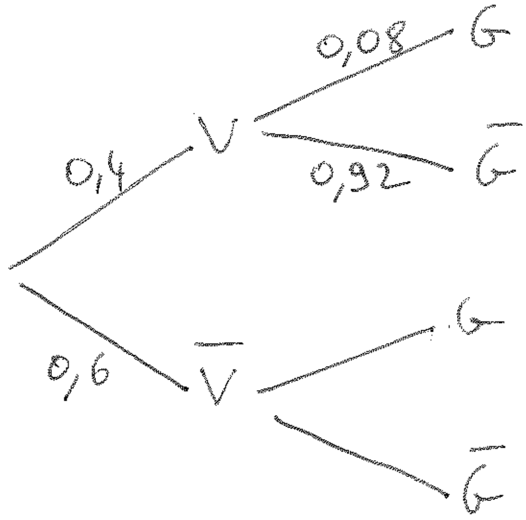
T est donc parallèle à (PQ)

Exercice 3 :

Partie A

1) a) $\underline{P(G) = 0{,}20}$ (d'après l'énoncé)

b)



2) $P(G \cap V) = P(V) \times P_V(G)$

$= 0{,}4 \times 0{,}08 = \underline{0{,}032}$

3) $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{P(G \cap \overline{V})}{P(\overline{V})}$, or, $P(G) = P(G \cap V) + P(G \cap \overline{V})$ (car $\{V ; \overline{V}\}$ est une partition de Ω)

d'où $P(G \cap \overline{V}) = P(G) - P(G \cap V)$

$= 0{,}2 - 0{,}032$

$= 0{,}168$

d'où : $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = \boxed{0{,}28}$

Partie B

$p = 0{,}4$

1) On répète n fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (2 issues → Succès : la personne choisie est vaccinée → Echec : la personne choisie n'est pas vaccinée)

On peut modéliser la situation à l'aide d'un schéma de Bernoulli.

Comme X compte les succès sur les n personnes interrogées, X suit $\mathcal{B}(n ; 0{,}4)$

2) $n=40$

a) $P(X=15)=\binom{40}{15}\times 0{,}4^{15}\times(1-0{,}4)^{40-15}$

$\simeq \underline{0{,}123}$

b) $P(X\geq 20)=1-P(X<20)$

$=1-P(X\leq 19)$

$\simeq \underline{0{,}130}$

Exercice (4):

$a\in\mathbb{R}^*$ $\quad\begin{cases} u_{n+1}=e^{2u_n}-e^{u_n} \\ u_0=a\end{cases}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) $g(x)=e^{2x}-e^{x}-x$

a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$)

$g'(x)=2e^{2x}-e^{x}-1$

or, $(e^x-1)(2e^x+1)=2e^{2x}+e^x-2e^x-1$

$=2e^{2x}-e^x-1=g'(x)$

Donc: $\underline{g'(x)=(e^x-1)(2e^x+1)}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) $e^x>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

d'où $2e^x+1>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. De plus, $e^x\geq 1$, pour tout $x\geq 0$

$\Leftrightarrow e^x-1\geq 0$, pour tout $x\geq 0$

$g'(x)\geq 0$, pour tout $x\geq 0$ et $g'(x)\leq 0$, pour tout $x\leq 0$.

Donc: g est croissante sur $[0;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;0]$

$g(0)=e^0-e^0-0=1-1-0=0$

D'après les variations de g, $g(0)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

Autrement dit : $\underline{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ g(x)\geq 0}$

c) $u_{n+1}-u_n=e^{2u_n}-e^{u_n}-u_n=g(u_n)$

or, d'après 1 b), $g(x)\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$

d'où en particulier : $g(u_n)\geq 0$, c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n\geq 0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

c'est-à-dire : (u_n) est une suite croissante.

2) Supposons $a \leq 0$:

a)

* Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = a \leq 0$ } la propriété est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_k \leq 0$

Alors : $e^{u_k} - 1 \leq 0$ et $e^{u_k} > 0$

Par produit : $\underbrace{e^{u_k}(e^{u_k} - 1)}_{= u_{k+1}} \leq 0$, la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) D'après 1c), on sait que (u_n) est croissante
de plus, d'après 2a), (u_n) est majorée par 0 } Théorème de convergence monotone : la suite (u_n) est convergente

c) $a = 0$: On montre par récurrence que $u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation : $u_0 = a = 0$: la propriété est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

$u_k = 0$

$u_{k+1} = e^{u_k}(e^{u_k} - 1) = e^0(e^0 - 1) = 0$: la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, si $a = 0$

3) Supposons $a > 0$:

(u_n) étant croissante - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) \text{ , or } u_n \geq a$$

Or, $a > 0$ et g croissante sur $[0 ; +\infty[$

Donc : $g(u_n) \geq g(a)$

c'est-à-dire : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Par récurrence :

* Initialisation : Pour $n = 0$

$u_0 = a \geq a + 0 \times g(a)$ } la propriété est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_k \geq a + k \times g(a)$

D'après 3a) $u_{k+1} - u_k \geq g(a)$

$(\Rightarrow) \ u_{k+1} \geq u_k + g(a) \geq \underbrace{a + k \times g(a) + g(a)}_{= a + (k+1) \times g(a)}$ } la propriété est héréditaire

* Conclusion : ~~La~~ propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_n \geq a + n \times g(a)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) D'après 1) b), $g(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

en particulier : $g(a) \geq 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $g(a) \geq 0$ } Par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \times g(a) = +\infty$

Théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4) $a = 0{,}02$:

a)
```
u ← 0,02
n ← 0
Saisir M
Tant que u ≤ M
   u ← e^u × (e^u − 1)
   n ← n+1
Fin Tant que
Afficher n
```

b) si $M = 60$:
A la calculatrice, on trouve $n = 36$