Sujet 5 Métropole 2019 (Obligatoire).

Exercice ①:

Partie Ⓐ:

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

(par composition)

Par somme:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}+e^{-x}) = +\infty$

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

d'où, par produit: $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$, par somme: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) f est dérivable sur $[0;+\infty[$, comme somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$, et:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{-x}\left(1 - e^{2x}\right)$$

or, $x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0$, d'où $e^{2x} \geq 1$

$\Leftrightarrow 1 - e^{2x} \leq 0$

Comme $\frac{1}{2}e^{-x} > 0$, pour tout $x \in [0;+\infty[$

alors: $f'(x) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$, c'est-à-dire

f strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

c) • f est continue sur $[0;+\infty[$, comme somme de fonctions continues sur $[0;+\infty[$

• f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ (voir 1 b)

· De plus, $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(1+1) = \frac{5}{2}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (question 1) a)

d'où $0 \in \left] \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \, ; \, f(0) \right]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{-x} + e^{x}\right)$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = f(x)$$

D'après 1 c), $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$

on a $f(\alpha) = 0$, or, $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$

d'où $-\alpha$ est aussi solution de cette équation avec $-\alpha \in \left]-\infty; 0\right]$

Partie B :

1) Hauteur d'un arceau $= f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(1+1)$

$$= \frac{5}{2} = 2,5$$

Un arceau mesure 2,50 m de haut

2 a) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{x}\right)$ (question 1 b))

d'où $1 + \left(f'(x)\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - e^{x}\right)^2$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{-2x} - 2\underbrace{e^{-x} \times e^{x}}_{=1} + e^{2x}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(e^{-2x} - 2 + e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-2x} + e^{2x}\right) - \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-2x} + e^{2x}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-2x} + e^{x} + 2\right)$$

$$\underline{1 + (f'(x))^2} = \underline{\frac{1}{4}\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2}$$

b)

$$I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_0^\alpha \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha} - \cancel{1} + \cancel{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

La longueur d'un arceau $= 2 \times I = \underline{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$
(on se place sur $[-\alpha ; \alpha]$).

Partie C :

Sur la façade Nord : 1 arceau

Aire sous la courbe de $f = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, dx$

$= 2 \times \int_0^\alpha f(x)\, dx$

(par symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées)

- Pour la façade sud, on a $2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - \text{Aire}(ABCD)$

$$= 2\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2\times 1$$

Donc, au total, pour les 2 façades :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2$$

2) $\alpha \simeq 1,92$.

pour le dessus de la serre, $\mathcal{A}' = (3\times 1,50)\times(\underbrace{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}_{\text{longueur d'un arc}})$

$$\simeq 4,5\times(e^{1,92} - e^{-1,92})$$

$$\simeq 30\,m^2$$

Pour toute la serre :

$$30 + 4\left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\right]_0^{1,92} - 2$$

$$\simeq 42\,m^2.$$

Exercice (2) :

Partie (A) :

1) a) $E(X_A) = \dfrac{a+b}{2}$ car X_A suit la loi uniforme sur [9

$$= \frac{9+25}{2} = 17$$

Durée moyenne : 17 minutes pour la partie A

b) $E(X_B) = \mu = 17$ minutes pour la partie B (la droite d'éq... est axe de symétrie pour la courbe donnée
(car X_B suit $\mathcal{N}(\mu ; 3^2)$)

2)

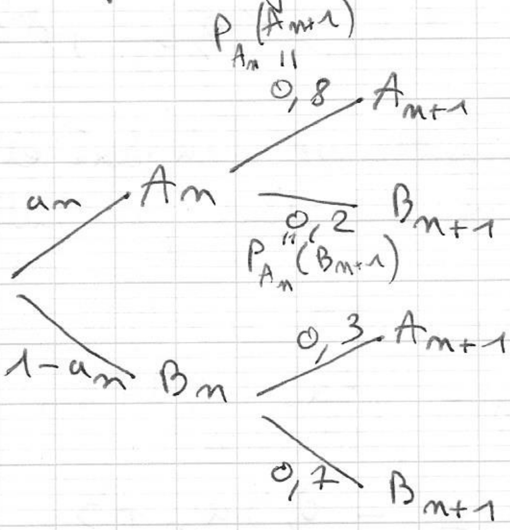
Pour X_A : $P(X_A \leq 20) = \dfrac{20-9}{25-9} = \dfrac{11}{16}$

Pour X_B : $P(X_B \leq 20) \simeq 0,84$ (calculatrice).

$P(\text{"durée d'1 partie inf à 20 min"}) = \frac{1}{2}\left(P(X_A \leq 20)\right) + \frac{1}{2}\left(P(X_B \leq 20)\right)$
$\simeq \boxed{0,76}$

Partie B :

1) a)



b) $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$

(Formule des probabilités totales)

$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n)$

$= 0,8 \times a_n + 0,3 \times (1 - a_n)$

donc $\underline{a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2) $a = 0,5$

a)

* Initialisation : $a_1 = 0,5$ et $0 \leq 0,5 \leq 0,6$
d'où $0 \leq a_1 \leq 0,6$
La propriété est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in \mathbb{N}^*$

alors : $0 \leq a_k \leq 0{,}6$

or, $a_{k+1} = 0{,}5a_k + 0{,}3$

et $0 \leq 0{,}5a_k \leq 0{,}3$

$\Rightarrow 0 \leq 0{,}3 \leq 0{,}5a_k + 0{,}3 \leq 0{,}6$

donc $0 \leq a_{k+1} \leq 0{,}6$, d'où la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$a_{n+1} - a_n = 0{,}5a_n + 0{,}3 - a_n$

$= -0{,}5a_n + 3$

or, $0 \leq a_n \leq 6$ (question 2a))

d'où $0 \leq 0{,}5a_n \leq 3$

d'où $-3 \leq -0{,}5a_n \leq 0$

d'où $0 \leq \underbrace{-0{,}5a_n + 3}_{a_{n+1} - a_n} \leq 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc (a_n) suite croissante

c) (a_n) croissante et majorée par 6, donc elle est convergen[te]
(théorème de convergence monoto[ne]

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$

alors, $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1}$, et comme $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$

Alors : $\ell = 0,5\ell + 0,3$

$\Leftrightarrow 0,5\ell = 0,3$

$\Leftrightarrow \ell = \frac{0,3}{0,5} = \boxed{0,6}$.

3) Cas général : $a \in [0;1]$.

$u_n = a_n - 0,6$.

a)

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6$.

$= 0,5a_n - 0,3$

$= 0,5(a_n - 0,6)$

d'où $u_{n+1} = 0,5\, u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Donc (u_n) suite géométrique de 1er terme $u_1 = a_1 - 0,6$
$= a - 0,6$

et de raison $0,5$.

b) comme (u_n) géométrique :

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$= (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$

Comme $a_n = u_n + 0,6$
$= (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

c) comme $-1 < 0,5 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$

Par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (a-0,6) \times 0,5^{n-1} = 0$

Par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$

Indépendante de a, car $(a-0,6) \times 0,5^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall a \in [0;1]$

d) Dans la partie A, car $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,6$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-a_n) = 0,4$

Exercice 3 :

1) $(E) : z^2 - 2\sqrt{3} z + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \times 3 - 16 = 12 - 16 = -4 < 0$

(E) admet donc 2 solutions complexes conjuguées.

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2} = \sqrt{3} + i$

$z_2 = \sqrt{3} - i$

$A(z_1 = \sqrt{3} + i)$

$B(z_2 = \sqrt{3} - i)$.

Tout d'abord, comme $z_2 = \overline{z_1}$

A et B sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

On a déjà $OA = OB$.

Or, $AB = |z_B - z_A| = |z_2 - z_1| = |\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i$

$= |-2i| = 2 \times |-$

$= 2 \times 1$

$= 2$

et $OA = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Donc $OA = AB = OB$, c'est-à-dire OAB est un triangle équilatéral. VRAI

2) $u = \sqrt{3} + i \quad \bar{u} = \sqrt{3} - i$.

$$u^{2019} + \bar{u}^{2019} = (\sqrt{3}+i)^{2019} + (\sqrt{3}-i)^{2019}$$

or, $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

d'où $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

de même, $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$(\sqrt{3}+i)^{2019} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019} = 2^{2019} e^{i\pi\frac{\cancel{3}\times 673}{\cancel{3}\times 2}}$$

$$= 2^{2019} e^{i\frac{673\pi}{2}}$$

et $(\sqrt{3}-i)^{2019} = 2^{2019} e^{-i\frac{673\pi}{2}}$

or, $\cos\frac{673\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{673\pi}{2} = \sin\left(\frac{672\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin\left(336\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

d'où $e^{i\frac{673\pi}{2}} = 1$

de même $e^{-i\frac{673\pi}{2}} = -1$ (car, $\sin\left(-\frac{673\pi}{2}\right) = -\sin\frac{673\pi}{2}$)

donc : $u^{2019} + \bar{u}^{2019} = 2^{2019} \times 1 + 2^{2019} \times (-1)$

$$= 0 \neq 2^{2019}$$ FAUX

3) $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0;+\infty[$:

$$f_n(x) = xe^{-nx+1}$$

f_n est dérivable sur $[0;+\infty[$:

On pose $u(x) = x$ $\qquad v(x) = e^{-nx+1}$
$u'(x) = 1$ $\qquad v'(x) = -ne^{-nx+1}$

Or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où $f'_n(x) = 1 \times e^{-nx+1} - nxe^{-nx+1}$
$= e^{-nx+1}(1-nx)$

Or,

. $e^{-nx+1} > 0$, pour tout $x \in [0;+\infty[$

. $1 - nx > 0 \iff 1 > nx$
$\iff \frac{1}{n} > x$

D'où $f'_n(x) > 0$, pour $x \in [0; \frac{1}{n}[$
et $f'_n(x) < 0$ pour $x \in]\frac{1}{n}; +\infty[$

avec $f'_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ Donc en $x = \frac{1}{n}$, f_n admet bien un maximum

C'est $\boxed{\text{VRAI}}$

4) $f(x) = \cos x \, e^{-x}$
Or, $-1 \leq \cos x \leq 1$
d'où $-e^{-x} \leq \cos x \, e^{-x} \leq e^{-x}$
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$.

Théorème d'encadrement :

$\cos x \, e^{-x}$ a une limite finie en $+\infty$ et
$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x \, e^{-x} = 0$.

Par conséquent : l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

$\boxed{\text{VRAI}}$

5) $A > 0$
L'algorithme permet de déterminer le plus entier naturel I, tel que $2^I > A$.

Ici, on a $2^{15} > A$

d'où $\ln 2^{15} > \ln A$ (car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$).

c'est-à-dire :
$15 \ln 2 > \ln A$, donc c'est $\boxed{\text{FAUX}}$.

Exercice 4 :

Partie (A) : Voir construction.

Partie (B) :

1) a) Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$:

$F(1 ; 0 ; 1)$ $H(0 ; 1 ; 1)$

comme $\vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AD}$, $K(0 ; \frac{1}{4} ; 0)$

d'où $\vec{FH}(0-1 ; 1-0 ; 1-1)$, donc $\vec{FH}(-1 ; 1 ; 0)$

$\overrightarrow{FK}\left(0-1\,;\,\frac{1}{4}-0\,;\,0-1\right)$, donc $\overrightarrow{FK}\left(-1\,;\,\frac{1}{4}\,;\,-1\right)$

$\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (F

En effet : $z_{\overrightarrow{FK}} = 0$; il n'existe pas de $k \neq 0$
et $z_{\overrightarrow{FH}} = 0$.
$z_{\overrightarrow{FK}} = k \times z_{\overrightarrow{FH}}$)

or, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FK} = 4\times(-1) + 4\times\frac{1}{4} + (-3)\times(-1)$

$= -4 + 1 - 3 = 0.$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{FH} = 4\times(-1) + 4\times 1 - 3\times 0$
$= -4 + 4 = 0.$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de F
Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (FHK)

b) Soit $M(x\,;y\,;z) \in (FHK)$.

$\overrightarrow{FM}\,(x-1\,;\,y\,;\,z-1)$

Comme $\vec{n}$ est normal au plan (FHK) (question 1)a))

$\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de ce plan :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{FM} = 0 \iff 4\times(x-1) + 4y - 3(z-1) =$

$\iff 4x + 4y - 3z - 4 + 3 = 0$

$\iff 4x + 4y - 3z - 1 = 0$

(équation cartésienne de (FHK))

c) Comme $\mathcal{P}$ // (FHK) et $I \in \mathcal{P}$.
D'où $\vec{n}$ vecteur normal aussi au plan $\mathcal{P}$
Donc : $4x + 4y - 3z + d = 0$, est 1 équation cartés

du plan $\mathcal{P}$.

or, $I\left(\frac{1}{2};0;1\right) \in \mathcal{P}$.

d'où $4\times\frac{1}{2} + 4\times 0 - 3\times 1 + d = 0$

$\iff 2 - 3 + d = 0 \iff d = 3 - 2 = 1.$

Donc : $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne :

$$\underline{4x + 4y - 3z + 1 = 0}$$

d)

Un point de la droite (AB) a son abscisse et son ordonnée égales à zéro.

Comme $M' \in \mathcal{P}$: $-3z + 1 = 0$

$\iff z = \frac{1}{3}$

Donc : $\overline{M'\left(0;0;\frac{1}{3}\right)}$.

2) $\Delta \perp \mathcal{P}$ et $E \in \Delta$.

a)

$\vec{n}(4;4;-3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$

Soit $M(x;y;z) \in \Delta$.

Comme Δ est orthogonale à $\mathcal{P}$,

$\overrightarrow{EM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. $E(0;0;1)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{EM}(x;y;z-1)\\ \vec{n}(4;4;-3)\end{array}\right\} \exists k \in \mathbb{R}^* \ \overrightarrow{EM} = k\vec{n}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z - 1 = -3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = -3k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Représentation}\\ \text{paramétrique}\\ \text{de } (\Delta)\end{array}\right)$$

b) $(ABC) : z = 0$

Or, $L \in (\Delta)$: $-3k+1=0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

D'où $L\left(4 \times \frac{1}{3} ; 4 \times \frac{1}{3} ; 0\right)$

$$\boxed{L\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3} ; 0\right)}$$

c) Voir figure.

d) . Δ et (BF) sont non coplanaires.
Elles ne peuvent donc pas être sécantes.

. Dans la représentation paramétrique de Δ, si on prend $k = \frac{1}{4}$

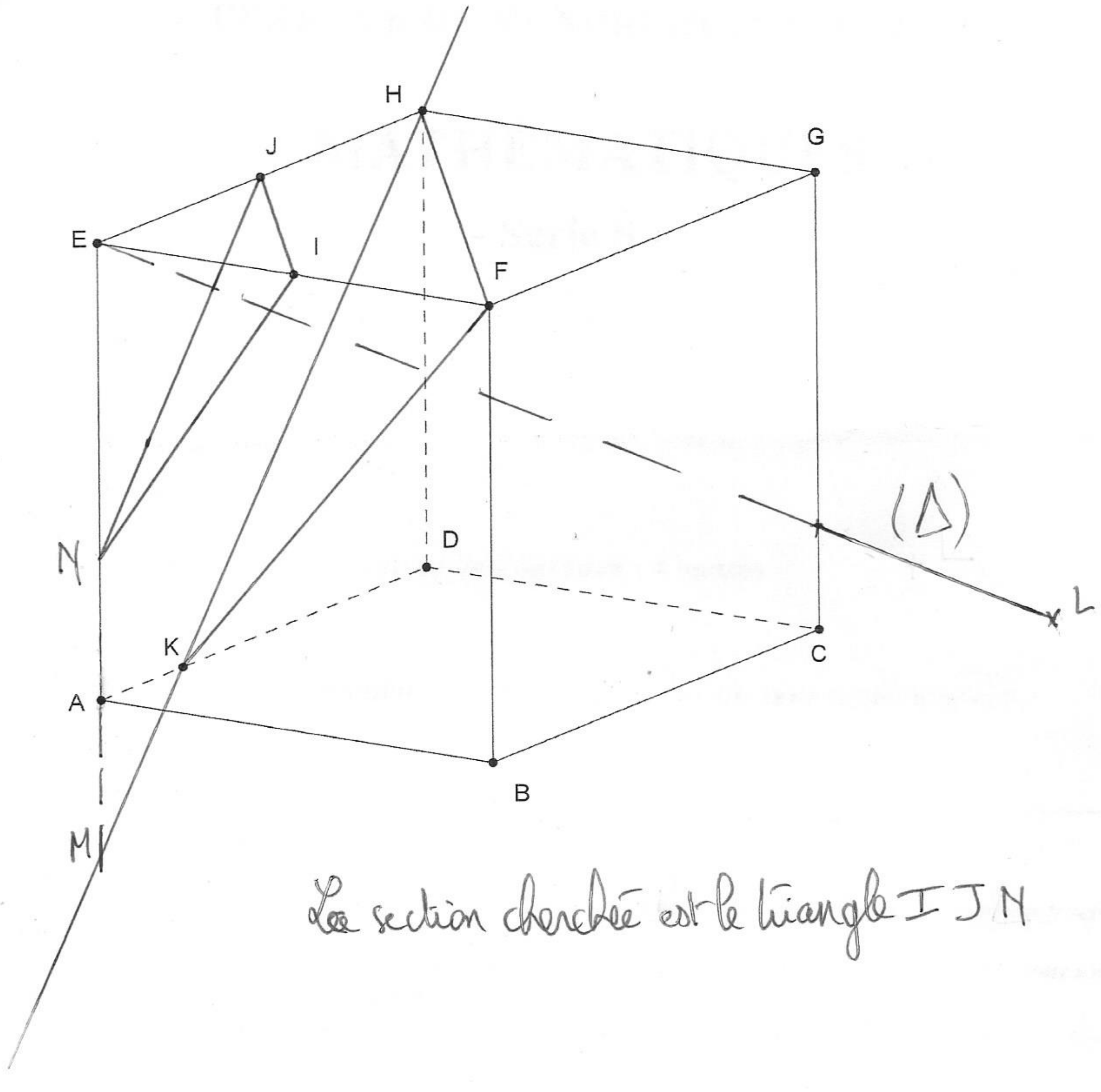
on obtient $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Or, ce point est situé sur (CG)

Donc Δ et (CG) sont sécantes

ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



La section cherchée est le triangle I J N