T4S	**Corrigé du DM n°2 de mathématiques :** *Limites de fonctions et asymptotes*	*Rendu le lundi 25 novembre 2019*

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2-7x+14}{x-4} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Notons (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-4}$$

$$ax + b + \frac{c}{x-4} = \frac{(ax+b)(x-4)+c}{x-4}$$
$$= \frac{ax^2-4ax+bx-4b+c}{x-4}$$
$$= \frac{ax^2+x(-4a+b)-4b+c}{x-4}$$

En procédant par identification (on identifie les coefficients de même degré du trinôme du second degré du numérateur)

$$\begin{cases} a = 1 \\ -4a+b = -7 \\ -4b+c = 14 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -7+4 = -3 \\ c = 14+4\times(-3) = 14-12 = 2 \end{cases}$$

Donc : $f(x) = x - 3 + \frac{2}{x-4}$

2) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

$\lim_{x \to -\infty} x-3 = -\infty$, de même $\lim_{x \to -\infty} x-4 = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} 2 = 2$ } Par quotient : $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-4} = 0^-$

Par somme : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

En raisonnant de même, $\lim_{x \to +\infty} x-3 = \lim_{x \to +\infty} x-4$

Alors : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-4} = 0^+$ } Par somme : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to 4^-} x-3 = 1$ et $\lim_{x \to 4^-} x-4 = 0^-$, $\lim_{x \to 4^-} 2 = 2$ } Par quotient : $\lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty$

Par somme : $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^+} x-4 = 0^+$, d'où $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2}{x-4} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

3) En déduire l'équation réduite d'une asymptote verticale (d) à la courbe (C).

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

Donc : La droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$

4) Etudier les variations de la fonction f

$f(x) = x - 3 + \dfrac{2}{x-4}$ $\quad$ f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

On pose $u(x) = x-4$ $\quad u'(x) = 1$

or, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, d'où $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{(x-4)^2} = \dfrac{(x-4)^2 - 2}{(x-4)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 8x + 16 - 2}{(x-4)^2}$

$= \dfrac{x^2 - 8x + 14}{(x-4)^2}$

$(x-4)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Etude du signe de $x^2 - 8x + 14$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 56 = 8 > 0$: 2 racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{8+2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\cancel{2}(4+\sqrt{2})}{\cancel{2}} = 4+\sqrt{2}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-\sqrt{8}}{2} = 4-\sqrt{2}$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

D'où les variations de f :

x	$-\infty$		$4-\sqrt{2}$		4		$4+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$1-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$1+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(4-\sqrt{2}) = \dfrac{(4-\sqrt{2})^2 - 7(4-\sqrt{2}) + 14}{\cancel{4} - \sqrt{2} - \cancel{4}}$

$= \dfrac{16 - 8\sqrt{2} + 2 - 28 + 7\sqrt{2} + 14}{-\sqrt{2}} = \dfrac{4-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-4\sqrt{2}+2}{2}$

$= 1 - 2\sqrt{2}$

$$f(4+\sqrt{2}) = \frac{(4+\sqrt{2})^2 - 7(4+\sqrt{2})+14}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16+8\sqrt{2}+2-28-7\sqrt{2}+14}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+2}{2} = 1+2\sqrt{2}$$

5) Montrer que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-(x-3)\big)=0$

$$f(x)-(x-3) = \frac{2}{x-4}$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x-4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2 = 2\end{array}\right\}$ Par quotient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x-4} = 0$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x-4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2\end{array}\right\}$ Par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x-4} = 0$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x-3)\right] = 0$

6) Etudier la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation y = x – 3

$f(x)-(x-3) = \frac{2}{x-4}$, or, $x-4>0 \iff x>4$

- Pour $x>4$: (C) est située strictement au-dessus de (D)
- Pour $x<4$: (C) est située strictement en dessous de (D)

7) Tracer (C), (d) et (D) dans un même repère.