BAC BLANC n°1

Lycée JEAN XXIII

MATHEMATIQUES

Série S

Jeudi 16 janvier 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

08h00-12h00

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

ATTENTION : RENDRE **TOUT** L'ENONCE AVEC VOTRE COPIE

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

Les élèves doivent ***traiter les quatre exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points) Pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité uniquement.

Attention ! ***A rédiger sur une copie séparée***

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si

$$\begin{cases} x \equiv x'[5] \\ y \equiv y'\ [5] \end{cases}$$

Deux matrices carrées d'ordre 2 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si $\begin{cases} a \equiv a'[5] \\ b \equiv b'[5] \\ c \equiv c'[5] \\ d \equiv d'[5] \end{cases}$

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous :

- Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers.
- Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent.
- Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ déduite du tableau ci-dessous : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à gauche de la ligne. Par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

- On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en multipliant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à gauche par la matrice M :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
- On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5.
- On utilise le tableau ci-avant pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$

1) Bob et Alice choisissent la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   a) Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

   b) On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

      Montrer que les matrices PM et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

   c) On considère A et A' deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Z' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5.

      Montrer alors que les matrices AZ et $A'Z'$ sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit, on admet que si A, A' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si B, B' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5, alors les matrices produit AB et $A'B'$ sont congrues modulo 5.

   d) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers.

      Déduire des questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5, alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5.

      Ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

   e) Décoder alors la lettre « D ».

2) On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.

   a) On pose $S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

      Vérifier que la matrice RS est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

   b) On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5.

      Montrer que, si c'est le cas, alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question 1) d) pour le codage avec la matrice M).

   c) En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

<u>Exercice 1 :</u> VRAI-FAUX (/ 5 points) ***<u>Pour les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité</u>***

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{\cos(n)+2n}{n+3}$

   Affirmation 1 : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

2) Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = xe^{-nx+1}$

   Affirmation 2 : pour tout x ϵ $[0\,; \frac{1}{n}]$, la courbe de la fonction f_n est située au-dessus de la droite d'équation y = x.

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = 3\sqrt{5-2x}$ sur $]-\infty; \frac{5}{2}]$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

   Affirmation 3: La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 passe par le point $A(3; 0)$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}$ et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

   Affirmation 4: L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

5) La proportion de gauchers en France est estimée à 13 %. Parmi les 93 élèves de Terminale d'un lycée, 17 sont gauchers. On souhaite savoir si la fréquence de gauchers observée sur cet échantillon est en accord avec la proportion de gauchers dans la population française.

   Affirmation 5 : au seuil de 95 %, on peut affirmer que la fréquence observée n'est pas en accord avec la proportion de 13% de gauchers en France.

<u>Exercice 2 :</u> (6 points) Commun à tous les candidats.

<u>Partie A</u>

Soit g la fonction sur [0 ; +∞ [par :

$$g(x) = - 2x^3 + 9x^2 -10x + 4$$

1) On donne le tableau de variations de g sur [0 ;+∞[:

x	0		x_1		x_2		+∞
Signe de g'(x)		-	0	+	0	-	
Variations de g		↘	$g(x_1)$	↗	$g(x_2)$	↘	

Avec $x_1 = \frac{9-\sqrt{21}}{6}$ $\quad x_2 = \frac{9+\sqrt{21}}{6}$

Retrouver par le calcul les résultats portés dans le tableau : L'image de 0 par g, signe de g'(x), variations de g et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près de $g(x_1)$ et $g(x_2)$

2) a) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α sur [0 ; +∞ [.
   b) A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3) Déterminer le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

<u>Partie B</u>

Soit A la fonction définie et dérivable sur [0 ; +∞ [telle que :

$$A(x) = - x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 8x$$

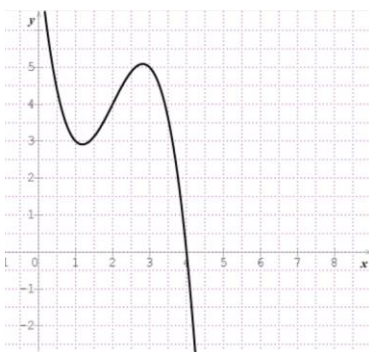
1) Démontrer que pour tout x positif ou nul, A'(x) a le même signe que g(x), où g est la fonction définie dans la partie A.
2) En déduire les variations de la fonction A sur [0 ; +∞ [

<u>Partie C</u>

On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par :

$$f(x) = - x^3 + 6x^2 - 10x + 8$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La figure est donnée ci-dessous.



Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 4], on admet que $f(x) \geq 0$.
On note M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées (x ; f(x)), P le point de coordonnées (x ; 0) et Q le point de coordonnées (0 ; f(x)).

1) Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α, α étant le réel défini dans la partie A.
2) Le point M a pour abscisse α. La tangente T en M à la courbe $\mathcal{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ? Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative sera prise en compte.

<u>Exercice 3 :</u> (3 points) Commun à tous les candidats.

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

<u>Partie A</u>

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné. Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

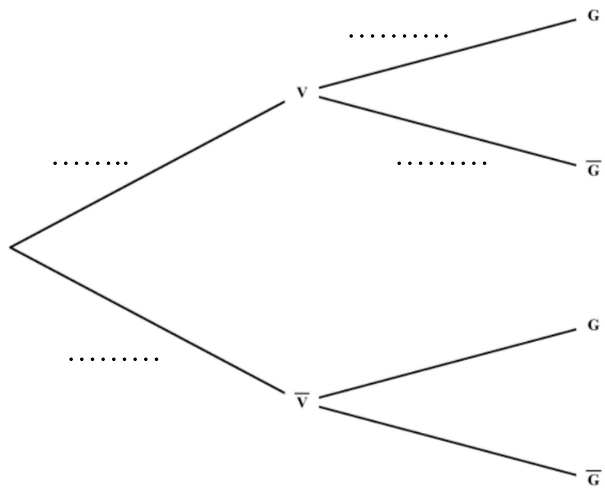
- 40 % de la population est vaccinée
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe
- 20 % de la population a contracté la grippe

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les événements :

V : « La personne est vaccinée contre la grippe »

G : « La personne a contracté la grippe »

1) a) Donner la probabilité de l'événement G
   b) Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches :



2) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contractée la grippe et soit vaccinée.
3) La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contractée la grippe est égale à 0,28.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X, la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2) Dans cette question, on suppose que n = 40.
   a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.
   b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Exercice 4 : (/6 points) Commun à tous les candidats.

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (un) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \\ u_0 = a \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On remarquera que $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$

1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$
   a) Calculer g'(x) et prouver que pour tout réel x, $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$
   b) Déterminer les variations de la fonction g et justifier que pour tout réel x, $g(x) \geq 0$
   c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n)

2) Dans cette question, **on suppose que $a \leq 0$**
   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 0$
   b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
   c) Dans le cas où a = 0, donner la limite de la suite (u_n)

3) Dans cette question, **on suppose que $a > 0$**

La suite (u_n) étant croissante, la question 1) permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq a$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \geq a + n \times g(a)$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4) Dans cette question, **on prend a = 0,02**

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$ où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

```
u ← 0,02
n ← 0
Saisir M
Tant que…………..

        ……………………

        …………………….
 FinTant que
 Afficher n
```

a) Compléter sur l'énoncé l'algorithme ci-dessus.
b) A l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si M = 60.