Exercice 1 : Vrai-Faux (2,5 points)

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse. Dans le cas d'une réponse vraie, proposer une démonstration. Dans le cas d'une réponse fausse, fournir un contre-exemple :

1) Toute suite bornée est convergente
2) Si $-1 \leq q \leq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
3) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
4) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$ sur $[0 ; +\infty[$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

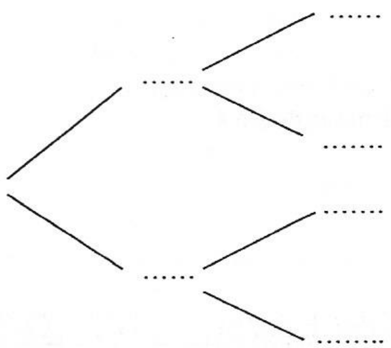
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point $A(1; \frac{11}{18}\sqrt{3})$

Exercice 2 : (5 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
Parmi ceux qui ne veulent pas une pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée. On considère les événements suivants :
L : « l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi »
C : « l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire »

1) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation (en ajoutant les lettres nécessaires) :



2) Calculer $P(L \cap C)$
3) Montrer que $P(C) = 0{,}5675$
4) Calculer la probabilité que l'élève choisi soit pour une pause plus longue sachant qu'il ne souhaite pas une répartition des cours plus étalée. *En donner une valeur arrondie à 10^{-4} près.*
5) On interroge successivement et de manière indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

Dans la suite, les calculs seront arrondis à 10^{-4} près.

a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

b) Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

c) Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Exercice 3 : (8 points)

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
3) Etudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4) On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.
   Déterminer les points en lesquels la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x + \frac{1}{x})$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
2) a) Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{3x^2}$
   b) Construire le tableau de variations complet de f

3) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$
   On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
   a) On considère la fonction d définie par $d(x) = f(x) - h(x)$.
      Déterminer la limite de d en $+\infty$
      Que peut-on en déduire des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$?
   b) Etudier les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$
4) Construire les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ dans un même repère.

Exercice 4 : (/4,5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N

1) $U \leftarrow 0$
2) Pour k allant de 0 à $N-1$
3) $\quad U \leftarrow 3U - 2k + 3$
4) FinPour

On saisit la valeur 3 pour N. Quelle valeur prend la variable U

Pour répondre à la question, on complétera sur l'énoncé le tableau ci-dessous.

	initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape3
N				
U				
k				

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ e, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$u_n \geq n$$
3) a) Démonstration de cours
Démontrer le théorème suivant :
(u_n) et (v_n) sont deux suites.
Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0, $u_n \geq v_n$
et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
b) En déduire la limite de la suite (u_n).
4) Démontrer que la suite (un) est croissante.
5) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = u_n - n + 1.$$
a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = 3^n + n - 1.$$
6) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$
a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de S_n.

BONUS