NOM :………………………………………………Prénom :…………………………

T5S	**Devoir n°2 :** *Suites /Limites de fonctions*	Jeudi 11 octobre 2018

- Calculatrice autorisée EN MODE EXAMEN
- Durée : 1h30
- **RENDRE LE SUJET**

Remarques :

NOTE : **/20**

Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{11+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n∈ℕ, $1 < u_n \leq \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$
2) Etudier les variations de la suite (u_n)
3) Montrer soigneusement que (u_n) est convergente.
4) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en justifiant.

Exercice 2 :

1) Soit la suite (u_n) définie pour n ∈ℕ*\{1} par : $u_n = 3 + \frac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$
   a) Montrer que pour tout n∈ℕ*\{1}, $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ en justifiant soigneusement
2) Soit la suite (v_n) définie pour n∈ℕ par : $v_n = \frac{n^2+\sin n}{2+3n^2}$

   Montrer soigneusement que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}$

Exercice 3 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout n∈ℕ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ a_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{n+1} = \frac{a_n + b_n\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ b_0 = \sqrt{2} \end{cases}$$

NOM :……………………………………………Prénom :…………………………

1) Soit la suite (c_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $c_n = b_n - a_n$
   a) Montrer que (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ en justifiant
2) Montrer que $a_n \leq b_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$
3) Etudier les variations des suites (a_n) et (b_n)
4) Montrer que (a_n) et (b_n) sont convergentes et ont la même limite.
5) On pose $t_n = 2a_n + (1 + \sqrt{2})b_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a) Montrer que (t_n) est une suite constante
   b) En déduire le calcul de la limite commune aux deux suites (a_n) et (b_n)

Exercice 4 :

1) Calculer les limites suivantes (si elles existent) en justifiant :
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{x^2-3x^3+2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}$

2) Soit $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{7x-1}}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f
   b) Etudier $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ en justifiant soigneusement.
   c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question b)

Exercice 5 :

1) **Question de cours :** (*Sur le sujet*)
   Prérequis : Pour tout réel a > 0, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ ***(Inégalité de Bernoulli)***

   Démontrer que si q > 1, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

…………………………………………………………………………………………………....

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2) (Sur votre copie) **VRAI /FAUX** : répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes **en justifiant :**

a)	La proposition « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » est héréditaire
b)	Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: Si (u_n) est majorée, alors (v_n) l'est aussi.
c)	Toute suite bornée est convergente
d)	Toute suite croissante et minorée diverge

NOM :………………………………………………Prénom :………………………….