

NOM : ..... Prénom : .....

CORRIGÉ

Fait le

|     |                                                                    |                     |
|-----|--------------------------------------------------------------------|---------------------|
| T5S | <b>Devoir de mathématiques :</b><br><i>Intégration / Complexes</i> | Jeudi 04 avril 2019 |
|-----|--------------------------------------------------------------------|---------------------|

- Durée : 1h30
- Calculatrice autorisée en mode Examen

Observations :

NOTE : /20

### Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes **en justifiant** :

$$I_1 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{3x} dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x+1) dx \quad I_3 = \int_{-1}^2 \frac{3x}{x^2+1} dx \quad I_4 = \int_0^1 x^2(1+x^3)^4 dx$$

$f: x \mapsto e^{3x}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , d'où en particulier sur  $[\ln 2; \ln 3]$   
Elle y admet donc des primitives.  
 $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$  est une primitive de  $f$ .  
 $I_1 = \left[ \frac{1}{3} e^{3x} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = \frac{1}{3} (e^{3 \ln 3} - e^{3 \ln 2}) = \frac{1}{3} (e^{\ln 3^3} - e^{\ln 2^3})$   
 $= \frac{1}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{1}{3} (27 - 8) = \frac{19}{3}$

$f: x \mapsto \cos(2x+1)$  est continue sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$   
Elle y admet donc des primitives.  $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+1)$  est une primitive de  $f$ .  
 $I_2 = \left[ \frac{1}{2} \sin(2x+1) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin(\pi+1) - \sin 1)$

$f: x \mapsto \frac{3x}{x^2+1}$  est continue sur  $[-1; 2]$ . Elle y admet donc des primitives.  
On pose  $u(x) = x^2+1$ ,  $u'(x) = 2x$ , d'où  $\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{x^2+1}$   
d'où  $\frac{3}{2} x \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3x}{x^2+1} = f(x)$

Alors:  $F(x) = \frac{3}{2} \ln(x^2+1)$  est une primitive de  $f$ .

$I_3 = \left[ \frac{3}{2} \ln(x^2+1) \right]_{-1}^2 = \frac{3}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{3}{2} \ln \frac{5}{2}$

NOM : ..... Prénom : .....

$f: x \mapsto x^2 (1+x^3)^4$  est une fonction continue sur  $[0; 1]$  comme produit de fonctions continues sur  $[0; 1]$ . Elle y admet donc des primitives.

On pose  $u(x) = 1+x^3$   $u'(x) = 3x^2$

$$u'(x)(u(x))^4 = 3x^2 (1+x^3)^4$$

$$\text{d'où } \frac{1}{3} u'(x) \times (u(x))^4 = x^2 (1+x^3)^4 = f(x)$$

Alors:  $F(x) = \frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^5}{5} = \frac{1}{15} (1+x^3)^5$  est une primitive de  $f$ .

$$\text{D'où: } I_4 = \left[ \frac{1}{15} (1+x^3)^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{15} (2^5 - 1)$$

$$= \frac{1}{15} (32 - 1) = \boxed{\frac{31}{15}}$$

NOM : .....Prénom : .....

NOM : ..... Prénom : .....

**Exercice 2 :**

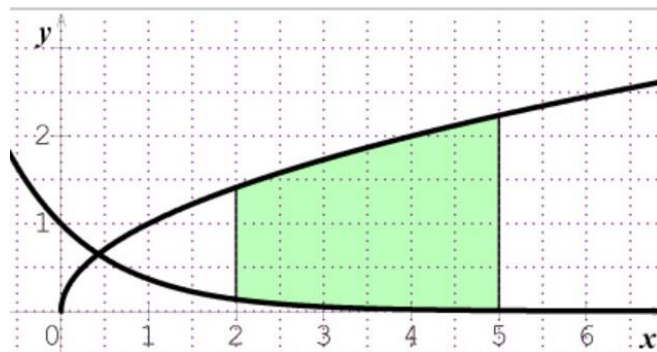
Soit  $F(x) = \int_2^x \frac{3}{\sqrt{t}} dt$

- 1) Calculer  $F'(x)$  **en justifiant**
- 2) En déduire les variations de  $F$  sur  $[2, +\infty[$

1)  $f: t \mapsto \frac{3}{\sqrt{t}}$  est continue et positive sur  $[2; +\infty[$   
Théorème fondamental :  $F$  définie par  $F(x) = \int_2^x f(t) dt$   
est dérivable sur  $[2; +\infty[$  et  
 $\underline{F'(x) = f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}}$

2)  $\frac{3}{\sqrt{x}} > 0$ , pour tout  $x \in [2; +\infty[$   
donc  $F$  strictement croissante sur  $[2; +\infty[$

**Exercice 3 :**



Dans le même repère du plan, on a représenté la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  et celle de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^{-x}$

Calculer l'aire en u.a. comprise entre les courbes des deux fonctions, et les droites verticales d'équations respectives  $x = 2$  et  $x = 5$

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_2^5 (f(x) - g(x)) dx \quad (\text{car } f(x) \geq g(x) \text{ sur } [2; 5]) \\ &= \int_2^5 (\sqrt{x} - e^{-x}) dx = \int_2^5 \sqrt{x} dx - \int_2^5 e^{-x} dx \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \left[ \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_2^5 - \left[ -e^{-x} \right]_2^5 = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + e^{-5} - e^{-2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) + \frac{1}{e^9} - \frac{1}{e^2} \approx 5,44 \text{ u.a.}$$

NOM : ..... Prénom : .....

#### Exercice 4 :

Soit  $F(x) = x \ln x$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$

- 1) Montrer que  $F$  est dérivable et calculer  $F'(x)$
- 2) En déduire que la valeur moyenne de  $f$  définie par  $f(x) = \ln(x) + 1$  sur l'intervalle

$$[1 ; 3] \text{ est égale à } \frac{3 \ln 3}{2}$$

1)  $x \mapsto x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$   
 $x \mapsto \ln x$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}^{*+}$   
 on pose  $u(x) = x$   $v(x) = \ln x$   $u'(x) = 1$   $v'(x) = \frac{1}{x}$   
 Or,  $(uv)' = u'v + uv'$  D'où :  $F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$   
 2)  $f(x) = \ln x + 1$  comme  $F'(x) = f(x)$ ,  $F$  est une primitive de  $f$   
 Soit  $\mu =$  valeur moyenne de  $f$  sur  $[1, 3]$

$$\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (\ln x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} [x \ln x]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} [3 \ln 3 - 1 \underbrace{\ln 1}_{=0}]$$

Donc

$$\mu = \frac{3}{2} \ln 3$$

**Exercice 5 :**

On considère  $P(z) = (z - \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2})(z^2 - 2z + 2)$

1) Résoudre  $P(z) = 0$

2) On pose  $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 + i$

a) Soient  $A(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2})$ ,  $B(1 + i)$  et  $C(1 - i)$  trois points du plan complexe.

- Déterminer l'ensemble  $E_1$  des points du plan complexe tels que  $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$
- Déterminer l'ensemble  $E_2$  des points du plan complexe tels que

$$|z - \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}| = |z - 1 + i|$$

b) Déterminer la forme exponentielle de  $z_1$  et de  $z_2$

c) En déduire celle de  $Z = z_1 \times z_2$

d) Déterminer la forme algébrique de  $Z$

e) En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{\pi}{12}$

$$1) P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2})(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0, \text{ d'où l'équation admet } 2 \text{ solutions complexes conjuguées.}$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - i$$

Donc:

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}; 1+i; 1-i \right\}$$

$$2) a) E_1 = \{ M(z) \in \mathcal{P} / |z - 1 - i| = \sqrt{2} \}$$

$$\text{or, } |z - 1 - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (1+i)| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z - z_0| = \sqrt{2}$$

Donc  $E_1 = \text{cercle de centre } B \text{ et de rayon } \sqrt{2}$

$$E_2 = \{ M(z) \in \mathcal{P} / |z - \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}| = |z - 1 + i| \}$$