TSS

Correction du DS commun (Fait le 29/11/18)

Exercice 1 : 2,5

1) « Toute suite bornée est convergente. »

C'est $\boxed{\text{faux}}$.

Contre-exemple : Soit $u_n = (-1)^n$ (0,5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 1$, c'est-à-dire (u_n) est bornée mais (u_n) n'a pas de limite.

2) « Si $-1 \leq q \leq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ »

C'est $\boxed{\text{faux}}$. Contre-exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1 \neq 0$.

(0,5)

(Pour que la propriété soit exacte, il faut que : $-1 < q < 1$)

3) « Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ »

C'est $\boxed{\text{faux}}$. Contre-exemple : $f(x) = -3x + 2$

$g(x) = -x + 1$ (0,5)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

or, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-3x+2}{-x+1} = \dfrac{\cancel{x}\left(-3 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3 + \frac{2}{x}\right) = -3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -1$

Par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{-3}{-1} = 3 \neq 1$

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$, sur $[0 ; +\infty[$

Sur $[0 ; +\infty[$, $\dfrac{2x+1}{x+3} \neq 0$. On pose $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$, g est dérivable partout où elle est définie. (en particulier sur $[0 ; +\infty[$)

On pose $u(x) = 2x + 1$ $v(x) = x + 3$

$u'(x) = 2$ $v'(x) = 1$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$g'(x) = \frac{2(x+3)-(2x+1)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

$\sqrt{g}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, car $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in [0;+\infty[$

$$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{\frac{5}{(x+3)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}} = \dfrac{5}{2(x+3)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}}$

1

(T_0) : tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en $a=0$

$(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a $f'(0) = \dfrac{5}{2\times 9\sqrt{\frac{1}{3}}} = \dfrac{5}{18\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{18}$ et $f(0) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d'où $(T_0) : y = \dfrac{5\sqrt{3}}{18}x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

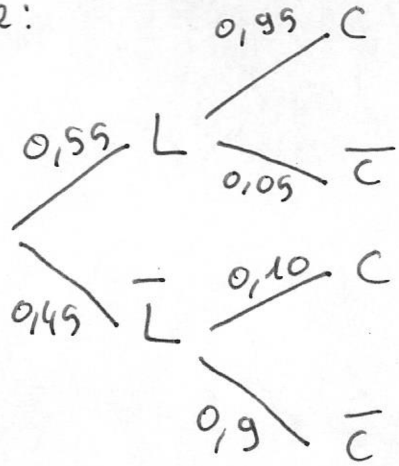
A appartient-il à (T_0) ?

Pour $x=1$: $\dfrac{5\sqrt{3}}{18}\times 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{18} = \dfrac{11\sqrt{3}}{18} = \dfrac{11}{18}\sqrt{3}$

donc $A\left(1 ; \frac{11}{18}\sqrt{3}\right) \in (T_0)$ Donc c'est $\boxed{\text{vrai}}$

Exercice 2 : $\cancel{/5}$

1) Arbre :



1

2) $P(L\cap C) = P(L) \times P_L(C)$

$= 0,55 \times 0,95$ 0,75

$= 0,5225$

3) $L, \overline{L}$ constituent une partition de Ω

$P(C) = P(C\cap L) + P(C\cap\overline{L})$

$= P_L(C)\times P(L) + P_{\overline{L}}(C)\times P(\overline{L})$ (formule des probabilités totales)

$= 0,95\times 0,55 + 0,10\times 0,45$

$P(C) = 0,5675$

4) $P_{\overline{C}}(L) = \dfrac{P(L\cap\overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{P(L)\times P_L(\overline{C})}{1-P(C)}$ (1)

$= \dfrac{0,55\times 0,05}{1-0,5675} \simeq \underline{0,0636}$

5) a) X suit une loi binomiale $B(4\,;\,P(C))$ avec $P(C) = 0,5675$ (0,25)

b) $P(X=2) = \binom{4}{2}\times 0,5675^2\times(1-0,5675)^{4-2}$ (0,5)

$\simeq \underline{0,3615}$

c) $\underline{P(X\geq 1)} = 1 - P(X<1)$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - \binom{4}{0}\times 0,5675^0\times(1-0,5675)^4$ (0,75)

$\simeq 1 - 0,03499 \simeq \underline{0,9650}$

__Exercice 3 :__ /8

__Partie A :__

$g(x) = 2x^3+x^2-1$ sur $\mathbb{R}$.

1) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme (2,25)

$g'(x) = 2\times 3x^2 + 2x = 6x^2+2x$

$= 2x(3x+1)$

$g'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$

Signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		0	$+\infty$
signe de $2x$	$-$		$-$	0	$+$
signe de $3x+1$	$-$	0	$+$		$+$
signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de g	$-\infty$ ↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗ $+\infty$

$g(0) = -1 \quad g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{27}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

Forme indéterminée

$2x^3+x^2-1 = x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x^3} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=2$

or, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

par produit : $\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}_{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-1=\underline{+\infty}$

2) D'après les variations de g, $g(x)\neq 0$, sur $]-\infty;0]$

Sur $]0;+\infty[$: g est continue (car c'est une fonction polynôme) et strictement croissante

1,25

De plus, $0\in[\underbrace{g(0)}_{=-1};\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}_{=+\infty}[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $\underline{g(x)=0}$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$

c'est-à-dire $\underline{g(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}}$

A la calculatrice : $\boxed{0,65<\alpha<0,66}$ (car $g(0,65)\simeq -0,02825$

$g(0,66)\simeq 0,010592$)

3) D'après les variations de g et la question 2),

on obtient le signe de $g(x)$:

0,5

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

4) $\mathcal{C}_g$ courbe de g

Soit (d) la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+3$

$g'(x)=6x^2+2x$

Soit a un nombre réel tel que $g'(a)=\frac{1}{2}$

($g'(a)$: coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au pt d'abscisse a

$(T_a)//(d) \Leftrightarrow a_{(T_a)}=a_{(d)}$

$\Leftrightarrow g'(a)=\frac{1}{2}$)

$g'(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6a^2 + 2a = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 12a^2 + 4a - 1 = 0$

0,75

$\Delta = 16 - 4 \times 12 \times (-1)$

$= 16 + 48$

$= 64 > 0$. D'où l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+8}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-8}{24} = -\frac{1}{2}$

Donc $(T_{\frac{1}{6}})$ et $(T_{-\frac{1}{2}})$ sont les 2 tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ qui sont parallèles à la droite (d) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$. (pts de tangence : $M_1(-\frac{1}{2}; -1)$ et $M_2(\frac{1}{6}; -\frac{26}{27})$)

Partie B :

Sur $]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 + x = 0$

Par somme : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^2 + x + \frac{1}{x} = +\infty$

Par produit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ 0,25

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + \frac{1}{x} = +\infty$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 0,25

2) a) Soit $x \in]0;+\infty[$, f est dérivable partout où elle est définie d'où en particulier sur $]0;+\infty[$

0,5 $f'(x) = \frac{1}{3}\left(2x + 1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3} \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} = \frac{1}{3x^2}\overbrace{(2x^3 + x^2 - 1)}^{= g(x)}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{3x^2}$

b) Sur $]0;+\infty[$, $3x^2 > 0$

$g(x) \geq 0$, pour $x \geq \alpha$, d'où $f'(x) \geq 0$, pour $x \geq \alpha$

et $f'(x) < 0$, pour $x \in]0;\alpha[$

Tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variation de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\alpha) = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

0,75

3) Sur $]0;+\infty[$, $h(x) = \frac{1}{3}(x^2+x)$

a) $d(x) = f(x) - h(x)$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3}\left(x^2 + x\right)$$

$$= \frac{1}{3x}$$ 0,25

On a $\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$, d'où, par quotient $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$ c'est-à-dire : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0}$ 0,25

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ doivent se "rapprocher" quand $x \to +\infty$

b) sur $]0;+\infty[$, $d(x) = \frac{1}{3x} > 0$, d'où $\mathcal{C}$ est située strictement au-dessus de $\mathcal{P}$. 0,25

4) Voir courbes. 0,5.

Exercice 4 : 4,5

Partie A :

	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
N	3	3	3	3
U	0	3	10	29
k		0	1	2

0,5

Si on saisit 3 pour N, la variable U va prendre la valeur 29

Partie B :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1) $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = \boxed{3}$ 0,25 $\quad u_2 = 3\times u_1 - 2\times 1 + 3$

$= 3\times 3 + 1 = \boxed{10}$ 0,25

2) Montrons par récurrence : $u_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

* Initialisation :

pour $n=0$, $u_0 = 0 \geq 0$, donc la propriété est initialisée

* Hérédité :

On suppose la propriété vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$

$$u_{p+1} - (p+1) = 3u_p - 2p + 3 - (p+1)$$

0,75

$$= 3u_p - 3p + 2$$

$$= 3(u_p - p) + 2$$

or, $u_p \geq p$ (hypothèse de récurrence)

d'où $u_p - p \geq 0$

d'où $3(u_p - p) \geq 0$ et $3(u_p - p) + 2 \geq 2 > 0$

donc $u_{p+1} - (p+1) > 0 \Leftrightarrow u_{p+1} > p+1$

la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c'est-à-dire : $u_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) a) (u_n), (v_n) sont deux suites

si $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_1$, $v_n \in]A ; +\infty[$

$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, v_n > A$

comme $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq n_0$

$(N = \max(n_0 ; n_1))$

$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

0,5

b) $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

or, d'après 2), $u_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Théorème de comparaison : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ 0,5

4) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n$$
$$= 2u_n - 2n + 3$$
$$= 2(u_n - n) + 3$$

or, $u_n \geq n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (question 2))

$\Leftrightarrow u_n - n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. 0,75

d'où $2(u_n - n) + 3 > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc : $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire (u_n) est une suite croissante.

5) $v_n = u_n - n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1$
$= 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$
$= 3u_n - 3n + 3$
$= 3(u_n - n + 1) = 3v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,5

Donc (v_n) est une suite géométrique, de raison 3 et de 1er terme

$v_0 = u_0 - 0 + 1$
$= 1$

b) Comme (v_n) est géométrique :

$v_n = v_0 \times q^n = 3^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,25

or, $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ 0,25

6) $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

a) $S_n = (3^0 + 0 - 1) + (3^1 + 1 - 1) + \dots + (3^n + n - 1)$

$= \underbrace{(3^0 + 3^1 + \dots + 3^n)}_{n+1 \text{ termes}} + \underbrace{(0 + 1 + \dots + n)}_{n+1 \text{ termes}} + \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{n+1 \text{ termes.}}$

$= 1 \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1-3} + \dfrac{n \times (n+1)}{2} + (-1) \times (n+1)$ Bonus 0,5

$= \underline{\dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1) + \dfrac{1}{2}(n^2 + n) + (-1) \times (n+1)}$

b) $\lim_{n \to +\infty} 3^{n+1} = +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \to +\infty} n = +\infty \end{array}\right\}$ Par somme : $\lim_{n \to +\infty} (n^2 + n) = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} (-(n+1)) = -\infty$ Bonus 0,5

Forme indéterminée :

$\dfrac{1}{2}(n^2 + n) - \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 + n - 2n - 2}{2}$

$= \dfrac{n^2 - n - 2}{2} = \dfrac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = +\infty$.

donc par somme : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1) + \frac{1}{2}(n^2 + n) + (-1) \times n + 1 = +\infty$

c'est-à-dire : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$