

Correction de quelques exercices sur les limites de fonctions et les asymptotes.

①

Exercice ①②:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 + 2}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$$

on a une forme indéterminée: " $+\infty - \infty$ "

$$\frac{2x^2 - 3x}{x^2 + 2} = \frac{x^2(2 - \frac{3}{x})}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})}$$

$$\begin{aligned} \text{or, } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2 \\ \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 2 \end{array}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

Donc la droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale
à la courbe de f

2) Pour étudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote Δ
on va déterminer le signe de $f(x) - 2$ selon les valeurs de x

$$f(x)-2 = \frac{2x^2-3x}{x^2+2} - \frac{2(x^2+2)}{x^2+2}$$
$$= \frac{-3x-4}{x^2+2}$$

• $x^2+2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• $-3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$

Donc $f(x)-2 \geq 0$, pour $x \leq -\frac{4}{3}$
et $f(x)-2 < 0$, pour $x > -\frac{4}{3}$

Autrement dit :

- Pour $x \leq -\frac{4}{3}$, $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de Δ .
- Pour $x > -\frac{4}{3}$, $(\mathcal{C}_f)$ est strictement en dessous de Δ .

Exercice 18 :

$$f(x) = -x+4 + \frac{7}{(x+4)^2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{-4\}$$

$$1) f(x) - (-x+4) = \frac{7}{(x+4)^2}$$

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x+4 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{d'où, par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+4)^2 = +\infty$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ d'où par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+4)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7 = 7, \text{ par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{(x+4)^2} = 0$$

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+4)] = 0$

Même chose, quand $x \rightarrow -\infty$

Donc la droite (Δ) d'eq. réduite $y = -x+4$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$

2) Position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ :

(3)

On a: $f(x) - (-x+4) = \frac{7}{(x+4)^2}$, or, $(x+4)^2 > 0$, pour tout $x \in D_f$.

d'où $\frac{7}{(x+4)^2} > 0$, pour tout $x \in D_f$.

Donc $(\mathcal{C}_f)$ est située strictement au-dessus de Δ .

Exercice (22):

1) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 1}{-x + 2}$

$\Delta: y = x - 1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) - (x-1) = \frac{-x^2 + 3x + 1}{-x + 2} - \frac{(x-1)(-x+2)}{-x+2}$

$= \frac{-x^2 + 3x + 1 - (-x^2 + 2x + x - 2)}{-x + 2}$

$= \frac{-x^2 + 3x + 1 + x^2 - 3x + 2}{-x + 2} = \frac{3}{-x + 2}$

or, $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Par quotient:} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-x + 2} = 0^- \end{array} \right\}$

En raisonnant de même:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{-x + 2} = 0^+$

Donc $(\Delta): y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$

2) $f(x) - (x-1) = \frac{3}{-x+2}$, or, $-x+2 > 0 \Leftrightarrow x < 2$

$\left. \begin{array}{l} \text{Donc si } x < 2, \\ (\mathcal{C}_f) \text{ au dessus de } \Delta \\ \text{Si } x > 2, (\mathcal{C}_f) \text{ en dessous de } \Delta \end{array} \right\}$