

Ex (1):

1) On répète 80 fois, de manière indépendante, la m. e.p. de Bernoulli de paramètre $p = 0,25$ (→ succès: pratique le surf
→ échec: ne pratique pas le surf).

On peut de modéliser la situation à l'aide d'un schéma de Bernoulli.

Soit X : la var. aléat. qui compte le n. de pers. pratiquant le surf parmi les 80 clients présents ds la bécabine.

X suit $B(80; 0,25)$ (la binomiale de paramètres 80, 0,25
d n proba du succès)

On doit donc calculer:

$$P(X=20) = \binom{80}{20} \times 0,25^{20} \times (1-0,25)^{80-20}$$

$$= \binom{80}{20} \times 0,25^{20} \times 0,75^{60}$$

A l'aide de la calculatrice:

$$P(X=20) \approx 0,103 \quad (\text{réponse d}).$$

(Même STAT, DIST, BINOM, 1P)

Data Variable

x : 20

Numtrial: 80

p : 0.25

EXE

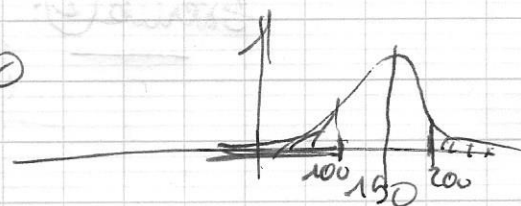
2) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 150$

$$P(X \geq 200) = 0,025$$

Par symétrie: $P(X \leq 100) = P(X \geq 200) = 0,025$.

$$\text{or, } P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - 0,025 = 0,975$$

réponse d



②

3) $E(T) = 5 = \frac{1}{\lambda}$, car T suit à la $\mathcal{E}(\lambda)$.

d'où $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$.

$P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5) = 1 - \int_0^5 f(x) dx$

où $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 0,2 e^{-0,2x}$

or, $\int_0^5 f(x) dx = \left[-e^{-0,2x} \right]_0^5$
 $= -e^{-1} + 1$

d'où $P(T \geq 5) = \underline{e^{-1}}$ (réponse c)

4) Niveau de confiance 0,95:
 $\left[\hat{p} - \frac{1}{\sqrt{n}}; \hat{p} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

Se longueur est $\frac{2}{\sqrt{n}}$

d'où $\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} = \frac{1}{0,04} = 25$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 50$

d'où $n = 50^2 = \underline{2500}$
 (réponse b)

Exercice 2:

$$\begin{cases} u_1 \\ u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

Partie A:

1) $u_1 = 0$

$u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -1$

(3)

$$u_3 = 3 \times u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4$$

$$u_4 = 4 \times u_3 - 1 = 4 \times (-4) - 1 = -16 - 1 = \underline{-17}$$

2) Pour n allant de 1 à 12 Faire
 $U \leftarrow (n+1) \times U - 1$
 Fin Pour

3) Conjectures:

* Si $u_1 = 0,7$: il semblerait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

* Si $u_1 = 0,8$: il semblerait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Partie B):

$$1) F(x) = (-1-x) e^{1-x}$$

F est dérivable sur $[0; 1]$

$$\text{et on pose } u(x) = -1-x \quad v(x) = e^{1-x}$$

$$u'(x) = -1 \quad v'(x) = -e^{1-x}$$

on a:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{d'où } F'(x) = -1 \times e^{1-x} + (-e^{1-x}) \times (-1-x)$$

$$= -e^{1-x} + (1+x)e^{1-x}$$

$$= e^{1-x} (-1 + 1 + x) = x e^{1-x} = f(x).$$

Donc F est une primitive de f sur $[0; 1]$

$$2) I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx$$

$$= \left[(-1-x) e^{1-x} \right]_0^1 = -2e^0 - (-1)e^1 = \boxed{e-2}$$

$$3) n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$$

$$I_2 = 2 \times I_1 - 1$$

$$= 2 \times (e - 2) - 1$$

$$= \boxed{2e - 5}$$

4) a)

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

d'où

$$e^{1-x} \leq e^1 = e \quad (\text{car } x \mapsto e^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}).$$

$$\text{et } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1$$

$$\text{d'où, par produit: } 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e^{(*)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\begin{aligned} b) \int_0^1 x^n e \, dx &= e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= e \times \left(\frac{1}{n+1} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{e}{n+1}}} \end{aligned}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x \mapsto x^n e^{1-x}$$

$$\text{et } x \mapsto x^n e$$

sont continues, positives sur $]0; 1[$.

Elles sont donc intégrables sur $]0; 1[$ et:

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 x^n e \, dx. \quad (\text{propriété de l'intégrale})$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}}} \quad (\text{d'après 4b)})$$

$$d) \text{ comme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e = e,$$

Par produit:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

théorème d'encadrement:

Alors, (I_n) a une limite finie en $+\infty$ et

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

Partie (C):

1) Par récurrence:

* Initialisation:

$$\begin{aligned} 1! (u_1 - e + 2) + I_1 &= 1 \times (u_1 - e + 2) + e - 2 \\ &= \underline{u_1} = \underline{\text{la propriété est initialisée}} \end{aligned}$$

* Hérédité:

on suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } u_{k+1} = (k+1) \times u_k - 1$$

$$= (k+1) \times [k! (u_k - e + 2) + I_k] - 1$$

$$= (k+1)! (u_k - e + 2) + \underbrace{(k+1) \times I_k}_{= I_{k+1}} - 1 \quad (\text{d'ap.})$$

$$= (k+1)! (u_k - e + 2) + I_{k+1}$$

La propriété est héréditaire
Conclusion: La propriété est initialisée et héréditaire.
 Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

a) si $u_1 = 0,7$:

$$u_n = n! \cdot (0,7 - e + 2) + I_n$$

$$= n! \cdot (2,7 - e) + I_n$$

or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (d'après 4d))

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty \quad \text{et} \quad 2,7 - e < 0$$

par produit:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \cdot (2,7 - e) = -\infty$$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$

b) si $u_1 = 0,8$:

$$u_n = n! \cdot (2,8 - e) + I_n$$

or, $2,8 - e > 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! \cdot (2,8 - e) = +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$

Exercice (3):

1) $z = i$

a) $\underline{z^2 = i^2 = -1 = -1 + i \times 0}$ (Forme algébrique)

$\underline{\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i = 0 - 1 \times i}$ (Forme algébrique)

b) Figure.

$$2) \quad z^2 + z + 1 = 0$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$, donc l'équation admet 2 solutions conjuguées.

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} ; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$3) \quad z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a) \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \theta = \frac{2\pi}{3}$$

On a: $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (Forme exponentielle)

$$z^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \text{ (Forme exponentielle)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ (Forme exponentielle)}$$

b) Voir figure.

Partie (B): $z \in \mathbb{C}^*$, $N(z^2)$, $P(\frac{1}{z})$

$$1) \quad (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = z^2 - z + z - 1 + 1 - \frac{1}{z}$$

$$= z^2 - \frac{1}{z}, \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^*$$

A, M et P alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PA}$ colinéaires
 $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \overrightarrow{PM} = k \overrightarrow{PA}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, z_{PM} = k z_{PA}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, z^2 - \frac{1}{z} = k \times \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{or, } z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1) \times \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{d'où } \underline{z^2 + z + 1 = k, k \in \mathbb{R}^*}$$

3) On pose $z = x + iy$

$$\underline{z^2 + z + 1 = (x + iy)^2 + x + iy + 1}$$

$$= x^2 + (iy)^2 + 2ixy + x + iy + 1$$

$$= x^2 - y^2 + x + 1 + 2ixy + iy$$

$$= \underline{x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)}$$

4/a)

A, M et P alignés $\Leftrightarrow z^2 + z + 1$ est réel (question 2)

$$\Leftrightarrow \text{Im}(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2xy + y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \text{ or } x = -\frac{1}{2}$$

L'ens. des pts M (z) tq $z \neq 0$ avec A, M et P alignés
 est la réunion de l'axe des abscisses (d'éq. $y = 0$) et de la droite

verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$

9

b) Voir figure.

Exercice (4):

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE} \quad \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HE}$$
$$\vec{p} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}, \quad \vec{q} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}, \quad \vec{r} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HE}.$$

1) a) $P(2; 0; 0) \quad Q(0; 0; 2)$
 $\Omega(3; 3; 3)$

b) P, Q, R ne sont pas alignés.
Ils déterminent un plan.

$$\vec{n}(1; b; c)$$

$$\overrightarrow{PQ}(-2; 0; 2)$$

$$\overrightarrow{PR}(-2; 4; 6). \quad (\text{2 vecteurs non-colinéaires}).$$

$$\vec{n} \text{ normal à } (PQR): \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$$

$$\text{or, } \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1 \times (-2) + 2c = 0 \Leftrightarrow 2c = 2$$
$$\Leftrightarrow c = 1$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 1 \times (-2) + 4b + 6c = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 4b + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b = -4$$

$$\Leftrightarrow b = -1$$

$$\text{d'où } \vec{n}(1; -1; 1) \text{ vect. normal à } (PQR)$$

c) Soit $M(x; y; z) \in (PQR)$:

$\overrightarrow{PM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$$\text{or, } \overrightarrow{PM}(x-2; y; z)$$

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (x-2) - 1 \times y + 1 \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 - y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x - y + z - 2 = 0} \quad (\text{Eq. cartésienne de } (PQR))$$

$$2) a) \Delta \perp (PQR) \text{ avec } \Omega \in \Delta$$

Alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de Δ .

$$\text{Soit } M(x; y; z) \in \Delta:$$

$\vec{\Omega M}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$$\vec{\Omega M}(x-3; y-3; z-3) \quad \vec{n}(1; -1; 1)$$

$$\exists k \in \mathbb{R}^*, \vec{\Omega M} = k\vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*, \begin{cases} x-3 = k \times 1 \\ y-3 = k \times (-1) \\ z-3 = k \times 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k+3 \\ y = -k+3 \\ z = k+3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Représentation} \\ \text{paramétrique} \\ \text{de } \Delta \end{array} \right)$$

b) Δ et (PQR) se coupent en 1 pt tq:

$$(k+3) - (-k+3) + (k+3) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3k + 3 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3k = -1$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{8}{3} \\ y = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3} \\ z = -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \quad \boxed{I\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right)}$$

c) $(A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthocentre.

(11)

$$\begin{aligned} \underline{OI} &= \sqrt{(x_I - x_O)^2 + (y_I - y_O)^2 + (z_I - z_O)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3} \right] \end{aligned}$$

3) $J(6; 4; 0)$ $K(6; 6; 2)$

a) $(PQR): x - y + z - 2 = 0.$

$$x_J - y_J + z_J - 2 = 6 - 4 + 0 - 2 = 0$$

d'où $J \in (PQR)$

b) $\vec{JK}(0; 2; 2)$ $\vec{QR}(0; 4; 4).$

$\vec{QR} = 2\vec{JK}$ d'où $\vec{QR}$ et $\vec{JK}$ colinéaires.
donc $(QR) \parallel (JK)$

c) Voir figure.