

BAC BLANC n°1

NOM :

PRENOM :

Classe :

MATHEMATIQUES Série S

15 JANVIER 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

08h00-12h00

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

ATTENTION : RENDRE TOUT L'ENONCE AVEC VOTRE COPIE

Calculatrice autorisée en MODE EXAMEN

Les élèves doivent **traiter les quatre exercices.**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (6 points) Commun à tous les candidats

Partie A :

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98
- La probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population.

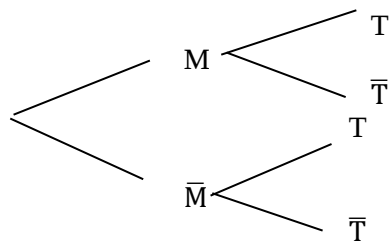
On appelle :

- M l'événement « l'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'événement « le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\bar{M}$ (respectivement $\bar{T}$) l'événement contraire de l'événement M (respectivement T)

On note p ($0 \leq p \leq 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible c'est-à-dire la probabilité d'avoir une personne atteinte par la maladie dans la population cible

1) a) Compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



b) Exprimer $P(M \cap T)$, $P(\bar{M} \cap T)$, puis $P(T)$ en fonction de p

2) a) Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}$$

b) On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.

Déterminer la proportion p de malades dans la population à partir de laquelle le test est fiable.

Partie B :

En juillet 2014, l'institut de veille sanitaire d'une île, en s'appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

On se propose d'étudier un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu'un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus.

- 1) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X .
- 2) Déterminer son espérance mathématique et interpréter le résultat.
- 3) Déterminer la probabilité d'avoir exactement 160 personnes atteintes par ce virus.
- 4) Calculer la probabilité $P(150 \leq X \leq 160)$
- 5) Calculer la probabilité d'avoir au moins 160 personnes atteintes par ce virus.

Partie C :

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion de gens atteints par le virus est en réalité plus importante.

Pour s'en assurer, on considère toujours la variable aléatoire X de la partie B qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et F la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l'île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus. Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l'institut de veille sanitaire ?

Justifier (on pourra s'aider d'un calcul d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %).

Exercice 2 : (5 points) Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Soit a un réel positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

- 1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
- 2) Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel l .
 - a) En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $l = \frac{1}{2}l^2 - l + \frac{3}{2}$
 - b) Montrer que les valeurs possibles de l sont 1 et 3.
- 3) Dans cette question, on prend $a = 2,9$
 - a) Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$
 - b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$
 - c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 4) Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite est croissante.
 - a) A l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée (on raisonnera par l'absurde).
 - b) En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$
 - c) L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
Compléter sur le sujet cet algorithme
 P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U .....
Tant que .....
    P ← .....
    U ← .....
Fin Tant que
```

Exercice 2 : (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est à rédiger sur une copie séparée.

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est un entier.

1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$2u_n = 3^n - 1$$

b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7

c) En déduire que u_{2022} est divisible par 7.

2) a) L'algorithme suivant calcule les cinq premiers termes de la suite (u_n)

Compléter sur le sujet cet algorithme

P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U .....
Tant que .....
    P ← .....
    U ← .....
Fin Tant que
```

b) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n) .

c) Sans justification, compléter sur le sujet le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5					

d) En déduire que, pour tout entier naturel n , si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

e) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

Partie B

On considère le système aux inconnues x , y et z réelles.

$$(S) : \begin{cases} -3y - z = 2 \\ x + 4y + z = 6 \\ -x - 3y = 10 \end{cases}$$

a) On pose la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer deux matrices U et V telles que le système (S) équivaut à $AU = V$

2) a) Montrer que $A^2 - 3A = -2I_3$.

b) En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} .

c) Déterminer la solution du système.

Exercice 3 : (4,5 points) Commun à tous les candidats

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère la fonction f qui, à tout nombre complexe z , associe :

$$f(z) = z^2 + 2z + 9$$

1) Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f , et donner le résultat sous forme algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$

3) Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4) Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z) - 8| = 3$

a) Montrer que pour tout z , $|f(z) - 8| = 3$ est équivalent à $|z + 1| = \sqrt{3}$

b) Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5) Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$$

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) et de (F) .

Exercice 4 : (5 points) Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$

On note (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1) a) Calculer $f(0)$ et $g(0)$

b) Démontrer que les courbes (C_f) et (C_g) ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2) On souhaite étudier la position relative de (C_g) et de la droite (Δ)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$

a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$

b) Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right)$, et en déduire la limite de la fonction h en $+\infty$

c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $h'(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$ puis étudier le signe de $h'(x)$ selon les valeurs de x .

d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$

e) En déduire que, pour tout x réel, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$

f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe (C_g) et de la droite (Δ) ?

3) a) Pour tout réel x , développer l'expression $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$

b) Déterminer la position relative des courbes (C_f) et (C_g) .